Признак Дюма

1. *Содержанием* $c(f)$ многочлена $f(x)$ с целыми коэффициентами называется наибольший общий делитель всех его коэффициентов.
   (а) Докажите, что $c(fg) = c(f)c(g)$.
   (б) Лемма Гаусса. Докажите, что если многочлен с целыми коэффициентами раскладывается на нетривиальные множители с рациональными коэффициентами, то он раскладывается на нетривиальные множители и с целыми коэффициентами.

2. **Признак Эйзенштейна.** Пусть многочлен $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ имеет целые коэффициенты и p — простое число. Докажите, что если коэффициент a_n не делится на p, коэффициенты a_i делятся на p для всех $0 \leqslant i \leqslant n-1$, но при этом коэффициент a_0 не делится на p^2, то $P(x)$ неприводим.

Пусть p — фиксированное простое число, $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i p^{\alpha_i} x^i$, где все a_i — целые числа, не делящиеся на p. Каждому ненулевому коэффициенту $a_i p^{\alpha_i}$ сопоставим точку на плоскости с координатами (i, α_i). Возьмём выпуклую оболочку данных точек и оставим только «нижнюю» часть многоугольника от точки $(0, \alpha_0)$ до точки (n, α_n). Полученная ломаная называется *диаграмма Ньютона.*

Признак Дюма. Пусть $f = gh$, где f, g и h — многочлены с целыми коэффициентами. Тогда система векторов звеньев диаграммы Ньютона многочлена f представляет собой объединение звеньев диаграмм Ньютона многочленов g и h. (Простое число p для всех многочленов берётся одно и то же.)

Пусть $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i p^{\alpha_i} x^i$, $g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j p^{\beta_j} x^j$ и $h(x) = \sum_{k=0}^{n-m} c_k p^{\gamma_k} x^k$ (числа a_i, b_j, c_k не делятся на p).

Возьмём одну сторону диаграммы Ньютона многочлена f. Обозначим концы данного отрезка (i_1, α_{i_1}) и (i_2, α_{i_2}). Пусть уравнение прямой, на которой лежит эта сторона, выглядит как $Ax + By = F$. Без ограничения общности $B > 0$; в этом случае $Ai + B\alpha_i \geqslant F$ для любого i, а минимальное и максимальное значение i, где достигается равенство, будут i_1 и i_2 соответственно.

На диаграммах Ньютона многочленов g и h рассмотрим стороны стороны, параллельные прямой $Ax + By = F$. Обозначим концы данных отрезков (j_1, β_{j_1}), (j_2, β_{j_2}) и (k_1, γ_{k_1}), (k_2, γ_{k_2}) (возможно, $j_1 = j_2$ или $k_1 = k_2$); пусть прямые, на которых эти отрезки лежат, имеют уравнения $Ax + By = G$ и $Ax + By = H$ соответственно.

3. **(а)** Докажите, что $\alpha_{j_1+k_1} = \beta_{j_1} + \gamma_{k_1}$.
   (б) Докажите, что $Ai + B\alpha_i = F$ при $i = j_1 + k_1$.
   (в) Докажите, что $Ai + B\alpha_i > F$ при $i < j_1 + k_1$.
   (г) Завершите доказательство признака Дюма.

4. Сформулируйте признак неприводимости полинома и выведите признак Эйзенштейна.

5. Пусть p — простое число и $(10, p) = 1$. Найдите все пары n и p, при которых приводим многочлен $x^n - 10px + p^2$.