

Разнобой

1. Докажите, что для любых вещественных чисел a, b, c выполнено неравенство

$$3a^2 + 3b^2 + c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca.$$

2. Квадратный трехчлен $x^2 + ax + b$ имеет два различных действительных корня. Докажите, что уравнение $x^4 + ax^3 + (b - 2)x^2 - ax + 1 = 0$ имеет четыре различных действительных решения.
3. В каждой клетке квадрата $n \times n$ стоит ребенок. Каждый из них смотрит в сторону одной из соседних по стороне клеток (никто не смотрит за пределы квадрата) и видит либо ухо, либо затылок ребенка, стоящего в этой клетке. Какое наименьшее число детей может видеть ухо?
4. Точка M — середина меньшей дуги BC окружности ω , описанной около остроугольного треугольника ABC . Прямые, проходящие через центр O окружности ω параллельные прямым MB и MC , пересекают стороны AB и AC в точках K и L соответственно. Прямая, проходящая через точку O параллельно прямой KL , пересекает высоту треугольника ABC , опущенную из точки A , в точке T . Докажите, что $LT = OK$.
5. На совместной конференции партий лжецов и правдолюбков в президиум было избрано 32 человека, которых рассадили в четыре ряда по 8 человек. В перерыве каждый член президиума заявил, что среди его соседей есть представители обеих партий. Известно, что лжецы всегда лгут, а правдолюбки всегда говорят правду. При каком наименьшем числе лжецов в президиуме возможна описанная ситуация? (Два члена президиума являются соседями, если один из них сидит слева, справа, спереди или сзади от другого.)
6. В неправильном тетраэдре $ABCD$ все грани равны, O — центр его описанной сферы, H — точка пересечения высот треугольника BCD . Докажите, что $AOH \perp BCD$.
7. Некоторые натуральные числа отмечены. Известно, что среди любых 2018 подряд идущих натуральных чисел хотя бы одно отмечено. Докажите, что существуют два отмеченных числа, одно из которых делится на другое.