

Какая-то геом конструкция

В этом листочке считаем, что дан треугольник ABC . Обозначим его середины сторон через A_0, B_0 и C_0 , точки касания вписанной окружности со сторонами — через A_1, B_1 и C_1 соответственно. Также стандартно обозначим через I, G и F центр вписанной окружности, точку Жергонна и точку Фейербаха треугольника ABC соответственно.

1. Пусть соответственные стороны треугольников $A_0B_0C_0$ и $A_1B_1C_1$ пересекаются в точках A', B' и C' . Докажите, что на сторонах треугольника $A'B'C'$ лежат вершины треугольника ABC .
2. Докажите, что треугольник $A'B'C'$ автополярен относительно вписанной окружности. Т.е. каждая его сторона является полярой вершины, через которую эта сторона не проходит.
3. Докажите, что прямая IG проходит через точки пересечения соответственных сторон треугольников $A_1B_1C_1$ и $A'B'C'$.
4. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC . Докажите, что прямая IM проходит через точки пересечения соответственных сторон треугольников $A_0B_0C_0$ и $A'B'C'$.
5. Докажите, что прямые AA', BB' и CC' перпендикулярны прямой IG .
6. Обозначим точку пересечения прямых CI и C_1A_1 через C_A , а CI с C_1B_1 через C_B . Аналогично определяются точки A_B, A_C, B_A, B_C . Докажите, что центр описанной окружности треугольника $C_A C_B C_1$ — точка C_0 .
7. Докажите, что точки C_A, C_B, A_B, A_C лежат на окружности ортогональной вписанной окружности. Обозначим ее через ω_B , а её центр — через O_B . Две аналогичных ей окружности обозначим через ω_A и ω_C , а их центры — через O_A и O_C соответственно. Докажите, что O_B лежит на $A'C'$.
8. Докажите, что точки A_0, B_0 и C_0 лежат на сторонах треугольника $O_A O_B O_C$.
9. Докажите, что треугольник $A_0B_0C_0$ является ортотреугольником треугольника $O_A O_B O_C$.
10. Обозначим через M_B середину стороны $O_A O_C$. Аналогично определим M_A и M_C . Докажите, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $M_A M_B M_C$ гомотетичны.
11. Докажите, что точки B', M_B и B_1 лежат на одной прямой.
12. Докажите, что прямые A_1A', B_1B', C_1C' пересекаются в точке F .
13. Докажите, что касательная в точке F к вписанной окружности проходит через точки пересечения соответственных сторон треугольников ABC и $A'B'C'$.