Неравенства

1. Положительные числа a, b, c таковы, что $ab + bc + ac \geqslant a + b + c$. Докажите, что
$$a + b + c \geqslant 3.$$

2. Докажите для чисел a, b, c, больших 1, неравенство
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \left|\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right| + \left|\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right| + \left|\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right| \leqslant a + b + c.$$

3. Вещественные числа x и y принадлежат отрезку $[0, 1]$. Докажите неравенство
$$\frac{x}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{y}{\sqrt{1+x^2}} \leqslant \sqrt{2}.$$

4. Сумма положительных чисел a, b, c равна 3. Докажите неравенство:
$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geqslant ab + bc + ac.$$

5. Для неотрицательных чисел a, b и c, сумма которых равна 1, докажите, что
$$\frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ca} + \frac{c}{1+ab} \geqslant \frac{9}{10}.$$

6. Докажите, что для любых положительных чисел x, y и z верно неравенство:
$$\sqrt[2]{x + \sqrt[3]{y + \sqrt[4]{z}}} > \sqrt[32]{xyz}.$$

7. Положительные числа x, y, z удовлетворяют соотношению $xy + yz + zx = 1$. Докажите, что
$$\sqrt{x + \frac{1}{x}} + \sqrt{y + \frac{1}{y}} + \sqrt{z + \frac{1}{z}} \geqslant 2 \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}).$$