Многочлены. Производные, дискретные производные.

1. Многочлен $P(x)$ с вещественными коэффициентами степени n имеет n различных вещественных корней. Какое максимальное число коэффициентов этого многочлена могут быть нулевыми?

2. Докажите, что при всех натуральных n у многочлена $1 + x + x^2/2 + \dots x^n/n!$ не более одного вещественного корня.

3. Существует ли пара многочленов с целыми коэффициентами $P(x)$ и $Q(x)$ степени выше первой, удовлетворяющих тождеству
$$P(Q(x)) = x^{3375} + 3375x^{3374} + 2x + 1?$$

4. Исходно на доске написаны многочлены $x^3 - 3x^2 + 5$ и $x^2 - 4x$. Если на доске уже написаны многочлены $f(x)$ и $g(x)$, то на доску можно добавить многочлены $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $f(g(x))$ и $cf(x)$, где c — вещественное. Может ли при некотором n на доске оказаться многочлен $x^n - 1$?

5. Обозначим $f(n)$ минимум выражения $|1^{2017} \pm 2^{2017} \pm \dots \pm n^{2017}|$, где минимум берётся по всевозможным расстановкам знаков «+» и «−». Докажите, что, начиная с некоторого момента, последовательность $f(n)$ периодична.

6. **Теорема Мардена.** Корни кубического многочлена $P(z)$ с комплексными коэффициентами лежат в вершинах треугольника ABC. Докажите, что корни его производной $P'(z)$ соответствуют фокусам вписанного эллипса Штейнера треугольника ABC. (*Эллипс Штейнера — максимальный по площади вписанный в треугольник эллипс*).

7. **Теорема Гаусса-Люка.** Для любого непостоянного многочлена $P(z)$ с комплексными коэффициентами корни его производной $P'(z)$ принадлежат выпуклой оболочке корней $P(z)$.

8. По кругу выписаны n чисел $a_0, a_1, \dots, a_i, \dots, a_{n-1}$ ($a_i \in \mathbb{Z}_n$). За один ход разрешается выбрать целое число $0 \leqslant s < n$ и заменить все числа по правилу $a_i' = a_i - a_{s+i}$, где a_i' — новое значение a_i. Докажите, что вне зависимости от стартового набора чисел и от выбора параметра s на каждом ходу (на разных ходах параметр s может быть разным), рано или поздно все числа a_i станут кратными n, если **(а)** $n = p$; **(б)** $n = p^k$ (k — натуральное, p — простое).