

Геометрические неравенства

1. На отрезке AB выбрана произвольная точка P . На отрезках AP и PB в одну сторону построены правильные треугольники AXP и BYP . При каких точках P отрезок XU минимален?
2. Внутри острого угла BAC дана точка P . Постройте на сторонах BA и AC точки X и Y так, чтобы периметр треугольника XYP был минимальным.
3. В треугольнике одна из средних линий больше одной из медиан. Докажите, что этот треугольник тупоугольный.
4. Даны n точек A_1, A_2, \dots, A_n и окружность радиуса 1. Докажите, что на окружности можно выбрать точку P так, что $PA_1 + \dots + PA_n > n$.
5. Докажите, что среднее арифметическое длин сторон произвольного выпуклого многоугольника меньше среднего арифметического длин всех его диагоналей.
6. Внутри выпуклого многоугольника лежит другой выпуклый многоугольник.
(а) Докажите, что периметр внешнего многоугольника больше, чем периметр внутреннего.
(б) Для точки O внутри треугольника ABC периметра P докажите неравенство

$$\frac{P}{2} < OA + OB + OC < P.$$

7. Докажите, что периметр остроугольного треугольника не меньше $4R$.
8. В равнобедренном треугольнике ABC на основании BC взята точка D , а на боковой стороне AB — точки E и M , так что $AM = ME$ и отрезок DM параллелен AC . Докажите, что $AD + DE > AB + BE$.
9. В треугольнике ABC медианы AD и BE пересекаются в точке M . Докажите, что, если угол AMB не тупой, то $AC + BC > 3AB$.