Геометрические неравенства

1. Даны n точек $A_1, A_2, \dots, A_n$ и окружность радиуса 1. Докажите, что на окружности можно выбрать точку P так, что $PA_1 + \dots + PA_n > n$.

2. Докажите, что среднее арифметическое длин сторон произвольного выпуклого многоугольника меньше среднего арифметического длин всех его диагоналей.

3. Внутри выпуклого многоугольника лежит другой выпуклый многоугольник.
(а) Докажите, что периметр внешнего многоугольника больше, чем периметр внутреннего.
(б) Для точки O внутри треугольника ABC периметра P докажите неравенство

$$\frac{P}{2} < OA + OB + OC < P.$$

4. Докажите, что периметр остроугольного треугольника не меньше $4R$.

5. В равнобедренном треугольнике ABC на основании BC взята точка D, а на боковой стороне AB — точки E и M, так что $AM = ME$ и отрезок DM параллелен AC. Докажите, что $AD + DE > AB + BE$.

6. В треугольнике ABC медианы AD и BE пересекаются в точке M. Докажите, что, если угол AMB не тупой, то $AC + BC > 3AB$.

7. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC. На сторонах AB и BC выбраны точки M и N соответственно таким образом, что $2\angle MON = \angle AOC$. Докажите, что периметр треугольника MBN не меньше стороны AC.

8. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ сторона AB перпендикулярна стороне CD, а сторона BC — стороне DE. Докажите, что если $AB = AE = ED = 1$, то $BC + CD < 1$.

9. Площади треугольников ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ равны S, S_1, S_2 соответственно, причём $AB = A_1B_1 + A_2B_2, AC = A_1C_1 + A_2C_2, BC = B_1C_1 + B_2C_2$. Докажите, что $S > 4\sqrt{S_1S_2}$.

10. Докажите, что сумма площадей пяти треугольников, образованных парами соседних сторон и соответствующими диагоналями выпуклого пятиугольника, больше площади всего пятиугольника.