Множества

1. Даны 2022 множества, каждое из которых состоит из 45 элементов, причём объединение любых двух множеств содержит ровно 89 элементов. Сколько элементов содержит объединение всех этих 2022 множеств?

2. Комиссия из 60 человек провела 40 заседании, на каждом заседании было ровно 10 человек. Докажите, что какие-то два члена комиссии были вместе хотя бы на двух заседаниях.

3. При каком наименьшем n для любого набора A из 2022 множеств найдётся такой набор B из n множеств, что каждое множество набора A является пересечением двух различных множеств набора B?

4. В Думе 1600 депутатов, которые образовали 16000 комитетов по 80 человек в каждом. Докажите, что найдутся два комитета, имеющие не менее четырёх общих членов.

5. В школе учится 1001 школьник. Они входят в банды, при этом один школьник может входить в несколько банд. Банды входят в сообщества, при этом одна банда может входить в несколько сообществ. Пусть всего k сообществ, при этом выполнены следующие условия:

   - Каждая пара школьников входит ровно в одну банду.
   - Для каждого школьника P и каждого сообщества S существует ровно одна банда этого сообщества S, в которую входит школьник P.
   - В каждой банде нечётное количество участников. Более того, если в банде $2n+1$ человек, то эта банда будет входить ровно в n сообществ.

   Найдите все возможные значения k.

6. В множестве, состоящем из n элементов, выбрано 2^{n-1} подмножеств, каждые три из которых имеют общий элемент. Докажите, что все эти подмножества имеют общий элемент.

7. Дано натуральное число n. Назовём последовательность из 0 и 1 *сбалансированной*, если она содержит ровно n единиц и ровно n нулей. Две сбалансированные последовательности a и b назовём *соседними*, если мы можем один из символов последовательности a переместить на другую позицию так, чтобы получить последовательность b. Докажите, что можно выбрать множество S, состоящее не более чем из $\frac{1}{n+1}\mathrm{C}_{2n}^{n}$ сбалансированных последовательностей так, чтобы любая сбалансированная последовательность содержалась в S или была соседней для одной из последовательностей S.

8. Дана доска 100×100. В каждой клетке стоит лампа. Изначально все лампы выключены. За один ход можно переключить лампу L и все лампы, расположенные с L в одной строке и в одном столбце. Какое наименьшее количество ходов надо сделать, чтобы включить все лампы?