

Таблицы

1. Клетки прямоугольника 5×41 раскрашены в два цвета. Докажите, что можно выбрать три строки и три столбца так, чтобы все девять клеток, находящихся на их пересечении, будут иметь один цвет.
2. Некоторые клетки доски 100×100 покрашены в чёрный цвет. Во всех строках и столбцах, где есть чёрные клетки, их количество нечётно. В каждой строке, где есть чёрные клетки, поставим красную фишку в среднюю по счёту чёрную клетку. В каждом столбце, где есть чёрные клетки, поставим синюю фишку в среднюю по счёту чёрную клетку. Оказалось, что все красные фишки стоят в разных столбцах, а синие фишки — в разных строках. Докажите, что найдётся клетка, в которой стоят и синяя, и красная фишки.
3. Клетки квадрата $n \times n$ раскрашены в белый и чёрный цвета в шахматном порядке, причём хотя бы одна из угловых клеток чёрная. За один ход можно в любом квадрате 2×2 одновременно перекрасить входящие в него 4 клетки по следующему правилу: каждую белую перекрасить в чёрный цвет, каждую чёрную — в зелёный, а каждую зелёную — в белый. При каких n за несколько ходов можно получить шахматную раскраску, в которой чёрный и белый цвета поменялись местами?
4. Петя поставил на доску 50×50 несколько фишек, в каждую клетку — не больше одной. Докажите, что Вася может поставить на свободные поля этой же доски не более 99 новых фишек (возможно, ни одной) так, чтобы по-прежнему в каждой клетке стояло не больше одной фишки, и в каждой строке и каждом столбце этой доски оказалось чётное количество фишек.
5. Есть клетчатая доска 2015×2015 . Дима ставит в k клеток по детектору. Затем Коля располагает на доске клетчатый корабль в форме квадрата 1500×1500 . Детектор в клетке сообщает Диме, накрыта эта клетка кораблём или нет. При каком наименьшем k Дима может расположить детекторы так, чтобы гарантированно восстановить расположение корабля?
6. По доске $n \times n$ прошла ладья, побывав в каждой клетке один раз, причём каждый её ход был ровно на одну клетку. Клетки занумерованы от 1 до n в порядке прохождения ладьи. Пусть M — максимальная разность между номерами соседних (по стороне) клеток. Каково наименьшее возможное значение M ?
7. Дана таблица 100×100 . Для любого k ($1 \leq k \leq 100$), в k -й строке таблицы записаны числа $1, 2, \dots, k$ в возрастающем порядке слева направо, но не обязательно в последовательных клетках; остальные $100 - k$ клеток заполнены нулями. Докажите, что найдутся два столбца, сумма чисел в одном из которых хотя бы в 19 раз превосходит сумму чисел в другом.
8. В каждой клетке таблицы $n \times n$ записано число 1 или -1 . Известно, что для каждой клетки произведение всех чисел в клетках, имеющих с ней общую сторону, равно 1. Докажите, что в любых двух клетках, симметричных относительно центра таблицы, записаны одинаковые числа.