

ТЧ

1. Докажите, что для любого многочлена с целыми коэффициентами $P(x)$ и любого натурального k , существует такое натуральное n , что $P(1) + P(2) + \dots + P(n)$ делится на k .
2. При каких n существуют натуральные числа a_1, a_2, \dots, a_n, b такие, что

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = b^2.$$

3. Дано натуральное число c и последовательность простых чисел $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ такая, что $p_i + c$ делится на p_{i+1} . Докажите, что последовательность $\{p_n\}$ ограничена.
4. При каких целых k верно утверждение: число $(a^3 + b^3 + c^3 - kabc)$ делится на $a + b + c$ при любых целых a, b, c , сумма которых не равна 0?
5. Даны различные натуральные числа a_1, a_2, \dots, a_n . Положим

$$b_i = (a_i - a_1)(a_i - a_2) \dots (a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1}) \dots (a_i - a_n).$$

Докажите, что наименьшее общее кратное $[b_1, b_2, \dots, b_n]$ делится на $(n - 1)!$

6. Докажите, что для любого натурального n найдётся натуральное k такое, что $51^k - 17$ делится на 2^n .
7. Существует ли такая бесконечная возрастающая арифметическая прогрессия $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ из натуральных чисел, что произведение $a_n \cdot \dots \cdot a_{n+9}$ делится на сумму $a_n + \dots + a_{n+9}$ при любом натуральном n ?
8. Существует ли такая последовательность натуральных чисел $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, что в ней каждое натуральное число встречается бесконечно много раз, и при этом для всех натуральных m последовательность $\{a_n \bmod m\}_{n=1}^{\infty}$ чисто периодична?