Комбинаторный разнобой

1. На шахматной доске отметили 16 клеток, причём в каждом столбце и в каждой строке по две отмеченные. Докажите, что в отмеченные клетки можно поставить 8 белых и 8 чёрных ладей так, чтобы в каждой строке и каждой строке стояло по одной белой и одной чёрной ладье.

2. Левша и невидимая блоха на плоскости играют, ходя по очереди. Очередным ходом Левша проводит прямую, а блоха совершает прыжок длины 1, не пересекающий ни одной прямой. Если таких прыжков нет, блоха проигрывает. Может ли Левша выиграть, как бы не играла блоха?

3. Сто одинаковых с виду монет разложены поровну на чаши весов так, что весы не в равновесии. Известно, что есть монеты ровно двух весов, причём монет каждого веса — чётное число. За одну операцию разрешается поменять местами любые две монеты. За какое наименьшее число операций можно наверняка добиться равновесия?

4. В классе 30 школьников. За месяц было 29 дежурств, в каждом дежурили двое. Докажите, что можно так выставить всем ученикам класса по одной оценке по 5-балльной шкале, что будет выставлена хотя бы одна пятерка, и в каждой паре дежуривших сумма оценок будет равна 8.

5. Каждому натуральному числу $m < 100$ поставлено в соответствие некоторое натуральное число $F(m)$, также меньшее 100. Строится последовательность $a_1 = 1$, $a_{k+1} = F(a_k)$. Докажите, что найдется номер $n < 100$, для которого $a_n = a_{2n}$.

6. Вершины правильного 1001-угольника как-то занумерованы числами от 1 до 1001. Кузнечик может прыгнуть из вершины A в вершину B, если между ними не больше 9 других вершин и число в B больше числа в A. Какое наибольшее число вершин гарантированно сможет посетить кузнечик вне зависимости от нумерации вершин, если стартовую вершину он выбирает сам?

7. Круг разделен на $2n$ секторов, n синих и n красных. В красные по часовой стрелке вписаны числа от 1 до n, в синие — против часовой. Докажите, что найдется полукруг с числами от 1 до n.