

**ТЧ**

1. Докажите, что для любого многочлена с целыми коэффициентами  $P(x)$  и любого натурального  $k$ , существует такое натуральное  $n$ , что  $P(1) + P(2) + \dots + P(n)$  делится на  $k$ .
2. При каких  $n$  существуют натуральные числа  $a_1, a_2, \dots, a_n, b$  такие, что

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = b^2.$$

3. Дано натуральное число  $c$  и последовательность простых чисел  $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$  такая, что  $p_i + c$  делится на  $p_{i+1}$ . Докажите, что последовательность  $\{p_n\}$  ограничена.
4. При каких целых  $k$  верно утверждение: число  $(a^3 + b^3 + c^3 - kabc)$  делится на  $a + b + c$  при любых целых  $a, b, c$ , сумма которых не равна 0?
5. Даны различные натуральные числа  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Положим

$$b_i = (a_i - a_1)(a_i - a_2) \dots (a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1}) \dots (a_i - a_n).$$

Докажите, что наименьшее общее кратное  $[b_1, b_2, \dots, b_n]$  делится на  $(n - 1)!$

6. Докажите, что для любого натурального  $n$  найдётся натуральное  $k$  такое, что  $51^k - 17$  делится на  $2^n$ .
7. Существует ли такая бесконечная возрастающая арифметическая прогрессия  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  из натуральных чисел, что произведение  $a_n \cdot \dots \cdot a_{n+9}$  делится на сумму  $a_n + \dots + a_{n+9}$  при любом натуральном  $n$ ?
8. Существует ли такая последовательность натуральных чисел  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ , что в ней каждое натуральное число встречается бесконечно много раз, и при этом для всех натуральных  $m$  последовательность  $\{a_n \bmod m\}_{n=1}^{\infty}$  чисто периодична?