Разнобой

1. У Ани, Бориса и Васи есть шарики десяти различных цветов и 120 коробок. Аня положила в каждую коробку по три шарика трёх различных цветов. Оказалось, что в любых двух коробках лежат разные наборы цветов. Борис хочет написать на каждой коробке цвет одного из шариков, лежащих в ней, таким образом, чтобы Вася, видя эти 120 надписей, смог хотя бы про одну коробку с уверенностью сказать, шарики каких трёх цветов в ней лежат. Обязательно ли он сможет это сделать?

2. Две окружности Ω_1 и Ω_2 касаются внешним образом в точке Q. Их общая внешняя касательная касается Ω_1 в точке B. Через точку A, диаметрально противоположную B, проведена касательная к Ω_2, которая касается этой окружности в точке C, лежащей по ту же сторону от прямой AQ, что и B. Докажите, что Ω_1 делит отрезок BC пополам.

3. На сайте проходило голосование на самого популярного спортсмена. Всего было N кандидатов, каждый из которых представлял ровно один из трёх видов спорта: футбол, волейбол и хоккей. Пользователи, принявшие участие в голосовании, должны были выбрать по одному любимому спортсмену в каждом виде спорта.

   После подведения итогов выяснилось, что у любых двух пользователей совпадает максимум один выбранный спортсмен, и для любого натурального k от 1 до 40 существует спортсмен, которого выбрали ровно k пользователей. Найдите наименьшее возможное N.

4. В треугольнике ABC продолжения медиан из вершин A и B пересекают описанную окружность в точках A_1 и B_1 соответственно. На стороне AC выбрана точка P, а на стороне BC — точка Q так, что $AP = 2PC$, $BQ = 2QC$. Докажите, что $\angle APB_1 = \angle BQA_1$.

5. Существует ли натуральное число a такое, что числа $x^2 + 3$ и $(x + a)^2 + 3$ взаимно просты для всех натуральных x?

6. Какое наибольшее количество троек (a, b, c) с условием $a < b < c$ можно составить из чисел $1, 2, \ldots, 100$ так, чтобы для любых двух составленных троек (a, b, c) и (a', b', c') выполнялось не более одного из равенств $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$?

7. В 11 «А», 11 «Б» и 11 «В» классах суммарно учатся 100 учеников, некоторые пары из которых дружат (взаимно). Назовём школьника необычным, если все его друзья учатся в одном классе. Докажите, что можно перевести одного из учеников в другой класс так, чтобы не появилось новых необычных школьников.

8. Последовательность (a_n) задана условиями $a_1 = 2$, $a_n = 2^{a_{n-1}} + 2$ при всех $n \geqslant 2$. Докажите, что a_n делится на a_{n-1} при всех $n \geqslant 2$.