Диагностическая работа, 2 этап

1. У Ани, Бориса и Васи есть шарики десяти различных цветов и 120 коробок. Аня положила в каждую коробку по три шарика трёх различных цветов. Оказалось, что в любых двух коробках лежат разные наборы цветов. Борис хочет написать на каждой коробке цвет одного из шариков, лежащих в ней, таким образом, чтобы Вася, видя эти 120 надписей, смог хотя бы про одну коробку с уверенностью сказать, шарики каких трёх цветов в ней лежат. Обязательно ли он сможет это сделать?

   Решение. Всевозможных различных троек шариков — $C_{10}^3 = 120$, то есть столько же, сколько и коробок. Таким образом, все комбинации троек шариков встречаются в наших коробках.

   Пронумеруем цвета от 1 до 10. На всех коробках, кроме коробки $8-9-10$, напишем любой цвет от 1 до 7. Тогда Вася увидит 119 коробок, ни на одной из которых не написан цвет 8, 9 или 10. И методом исключения поймёт, что в последней коробке находятся цвета $8-9-10$.

2. Во вписанном пятиугольнике $ABCDE$ $AB = BC, CD = DE$. Отрезки AD и BE пересекаются в точке P, отрезок BD пересекает CA и CE в точках Q и T соответственно. Докажите, что треугольник PQT равнобедренный.

   Решение. Заметим, что

$$\angle CBD = \angle DBE = \angle CAD = \angle DAE,$$

   так все эти углы опираются на хорды одинаковой длины. Аналогичным образом,

$$\angle CDB = \angle BDA = \angle CEB = \angle BEA.$$

   Тогда $BCDP$ — дельтоид, так как его диагональ BD является биссектрисой его углов. Тогда треугольники QTP и QTC симметричны относительно BD.

   Теперь достаточно доказать равнобедренность треугольника QTC:

$$\angle CQT = \frac{1}{2}(\smile AB + \smile CD) = \frac{1}{2}(\smile BC + \smile DE) = \angle CTQ.$$

3. Действительные числа a, b, c и d таковы, что $a+b+c+d = 0$ и $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{abcd} = 0$. Какие значения может принимать выражение $(ab-cd)(c+d)$?

   Решение. Преобразуем второе выражение

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{abcd} = 0;$$

$$abc + abd + acd + bcd = -1;$$

$$ab(c + d) + cd(a + b) = -1.$$

Из выражения $a + b + c + d = 0$ следует, что $a + b = -(c + d)$. Тогда

$$ab(c + d) + cd(a + b) = -1;$$

$$ab(c + d) - cd(c + d) = -1;$$

$$(ab - cd)(c + d) = -1.$$

4. Две окружности Ω_1 и Ω_2 касаются внешним образом в точке Q. Их общая внешняя касательная касается Ω_1 в точке B. Через точку A, диаметрально противоположную B, проведена касательная к Ω_2, которая касается этой окружности в точке C, лежащей по ту же сторону от прямой AQ, что и B. Докажите, что Ω_1 делит отрезок BC пополам.

Решение. Пусть O_1, O_2 — центры, R_1, R_2 — радиусы окружностей Ω_1, Ω_2 соответственно. Пусть общая внешняя касательная касается Ω_2 в точке K, BC пересекает Ω_1 в точке M. Заметим, что $BMA = 90°$, поэтому, чтобы доказать, что $BM = MC$, нам достаточно доказать, что $AB = AC$.

Рассмотрим прямоугольную трапецию O_1BKO_2:

$$BK^2 = O_1O_2^2 - (KO_2 - BO_1)^2 = (R_1 + R_2)^2 - (R_1 - R_2)^2 = 4R_1R_2.$$

Теперь рассмотрим прямоугольную трапецию $ABKO_2$:

$$AO_2^2 = BK^2 + (KO_2 - AB)^2 = 4R_1R_2 + (R_2 - 2R_1)^2 = 4R_1^2 + R_2^2.$$

И осталось рассмотреть прямоугольный треугольник ACO_2:

$$AC^2 = AO_2^2 - O_2C^2 = 4R_1^2 + R_2^2 - R_2^2 = AB^2.$$

5. Существует ли натуральное число a такое, что числа $x^2 + 3$ и $(x + a)^2 + 3$ взаимно просты для всех натуральных x?

Решение. Ответ: нет. Предположим, что такое a существует, тогда, очевидно, что оно не может делиться ни на 2, ни на 3. Мы знаем, что

$$(x^2 + 3, (x + a)^2 + 3) = (x^2 + 3, 2ax + a^2).$$

Также заметим, что

$$4a(x^2 + 3)–(2x–a)(2ax + a^2) = a(a^2 + 12).$$

Пусть $a^2 + 12$ делится на некоторое простое p. Тогда понятно, что $2a$ не делится на p, значит существует такое x, что $2ax+a^2$ делится на p. Но тогда в силу рассмотренного равенства получаем, что $x^2 + 3$ также делится на p, следовательно $(x^2 + 3, 2ax + a^2)$ больше 1, противоречие.

6. Какое наибольшее количество троек (a, b, c) с условием $a < b < c$ можно составить из чисел $1, 2, \ldots, 100$ так, чтобы для любых двух составленных троек (a, b, c) и (a', b', c') выполнялось не более одного из равенств $a = a', b = b', c = c'$?

Решение. Ответ: 2450. Заметим, что для данного b существует $b - 1$ возможных a и $100–b$ возможных c. Поэтому троек с данным b не больше, чем $min\{b–1, 100–b\}$. Сумма таких минимумов по всем b от 1 до 100 равна $2(1 + 2 + \ldots + 49) = 50 \cdot 49 = 2450$. Построим пример с таким количеством троек. Достаточно брать арифметические прогрессии длины 3. Прогрессий с разностью 1 будет 98, с разностью 2 — 96, ..., с разностью 49 — 2, и всего получается $2 + 4 + \ldots 98 = 2450$.