Диагностическая работа

Алгебра и теория чисел

1. Лёня выписал на доску натуральное число K. Оказалось, что

$$2K = x^2,$$

$$15K = y^3$$

для некоторых натуральных x, y. Какое наименьшее значение может принимать K?

Решение: $x^2 \,\vdots\, 2$, следовательно $x^2 \,\vdots\, 4$, следовательно $K \,\vdots\, 2$. Тогда $y^3 \,\vdots\, 2 \cdot 3 \cdot 5$, следовательно $y^3 \,\vdots\, 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3$, следовательно $K \,\vdots\, 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2$. Возвращаясь к первому равенству получаем, что $x^2 \,\vdots\, 8$, следовательно $x^2 \,\vdots\, 16$, следовательно $K \,\vdots\, 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 1800$. Легко видеть, что 1800 подходит.

2. При каких положительных значениях x и y дробь

$$\frac{25y^2 + 16x^2}{xy}$$

принимает наименьшее значение, если известно, что $x + y = 9$?

Решение: Так как $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$, то получаем, что

$$\frac{(5y)^2 + (4x)^2}{xy} \geqslant \frac{2 \cdot 5y \cdot 4x}{xy} = 40,$$

причем, как известно, равенство достигается лишь в том случае, когда $a = b$, то есть $5x = 4y$. Теперь осталось вспомнить, что $x + y = 9$, и получить ответ: $x = 5, y = 4$.

3. Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_{11}$ — различные нечётные простые числа. Сколько решений имеет сравнение $x^2 \equiv 1 \pmod{p_1 p_2 \cdot \ldots \cdot p_{11}}$ среди чисел от 0 до $p_1 p_2 \cdot \ldots \cdot p_{11} - 1$?

Решение: Сравнение $x^2 \equiv 1 \pmod{p_i}$ равносильно тому, что либо $x \equiv 1 \pmod{p_i}$, либо $x \equiv -1 \pmod{p_i}$. Тогда для каждого из 11 простых чисел можно выбрать одну из двух альтернатив и для каждого такого выбора получить решение среди чисел от 0 до $p_1 p_2 \cdot \ldots \cdot p_{11} - 1$ (по китайское теореме об остатках такое существует и единственно). Значит всего решений $2^{11} = 2048$.

4. Найдите все целые числа n, для которых число

$$\sqrt{\frac{25}{2} + \sqrt{\frac{625}{4} - n}} + \sqrt{\frac{25}{2} - \sqrt{\frac{625}{4} - n}}$$

целое.

Решение: Возведём число из условия в квадрат:

$$\frac{25}{2}+\sqrt{\frac{625}{4}-n}+\frac{25}{2}-\sqrt{\frac{625}{4}-n}+2\sqrt{\left(\frac{25}{2}+\sqrt{\frac{625}{4}-n}\right)\left(\frac{25}{2}-\sqrt{\frac{625}{4}-n}\right)}=$$

$$=25+2\sqrt{\left(\frac{25}{2}\right)^2-\left(\frac{625}{4}-n\right)}=25+2\sqrt{n}.$$

Получается, что $25+2\sqrt{n}$ — квадрат некоторого натурального числа, значит $\sqrt{n}$ целое, и тогда это квадрат некоторого нечётного натурального числа. При $25+2\sqrt{n}=5^2$ и $25+2\sqrt{n}=7^2$ получаем ответы $n=0$ и $n=144$, при больших квадратах n будет больше, чем $\frac{625}{4}$, чего быть не может.

Комбинаторика

5. В мебельном магазине продаются 3 вида кроватей, 4 вида тумбочек, 5 видов столов и 4 вида стульев. Сколько существует способов купить в магазине несколько (возможно, один) различных предметов?

В наборе купленных предметов должно быть не более одной кровати, не более одной тумбочки, не более одного стола, не более одного стула (то есть нельзя, например, купить две кровати, даже если они разных видов).

Решение: Добавим к каждому виду мебели вариант «не брать этот вид мебели вообще». Тогда всего вариантов выбрать какой-то набор будет $(3+1)(4+1)(5+1)(4+1)=600$. Но мы не учли вариант, где не покупаем вообще ничего. Таким образом, итоговый ответ: $600-1=599$.

6. В мешке фокусника находятся 100 карт четырёх мастей. Известно, что если взять наугад любые 90 карт, то среди них обязательно встретятся все четыре масти. Какое наименьшее количество карт надо взять, чтобы среди них наверняка нашлись карты трёх мастей?

Решение: Так как среди любых 90 карт найдутся все четыре масти, то у каждой масти есть хотя бы $100-89=11$ карт. Следовательно, если взять $100-22+1=79$ карт, то мы обязательно достанем хотя бы три различные масти. Пример $11, 11, 11, 67$ показывает, что если взять меньшее число карт, то этого может быть недостаточно.

7. Дана таблица 3×5, раскрашенная в белый цвет. Сколько существует способов раскрасить несколько (возможно, ноль) клеток в чёрный цвет так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце было чётное число чёрных клеток?

Решение: Заполним как угодно прямоугольник $2{\times}4$ в левом верхнем углу доски (это можно сделать $2^8 = 256$ способами). Тогда в первых двух строчках и в первых четырёх столбцах однозначно восстанавливается цвет последний незаполненной клетки. Итого, у нас остаётся не закрашенной только правая нижняя клетка. Закрасим её так, что в последней строке условие про чётное число чёрных клеток выполнялось. Докажем, что в последнем столбце условие тоже выполняется. Действительно, так как в каждой строке чётное число черных клеток, то и во всей таблице их чётное число, а так как в первых столбцах чётное число чёрных клеток, то и в последнем столбце чётное число чёрных клеток. Итого любое заполнение прямоугольника 2×4 однозначно дополняется до заполнения всего прямоугольника, значит всего 256 способов.

Геометрия

8. В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) диагонали перпендикулярны. Найдите длину BC, если известно, что $AC = 5$, $BD = 12$, $AD = 7$.

Решение: Пусть диагонали трапеции пересекаются в точке O. Пусть $AO = AC \cdot x = 5x$, тогда $DO = BD \cdot x = 12x$. Тогда $49 = AD^2 = AO^2 + DO^2 = 25x^2 + 144x^2 = 169x^2$, то есть $x = \frac{7}{13}$. Тогда $BC^2 = (1-x)^2(AC^2 + BD^2) = 6^2$, следовательно $BC = 6$.

9. Точки K, L, M отмечены на рёбрах AB, BC, CD тетраэдра $ABCD$. Плоскость KLM пересекает ребро AD в точке N. Найдите отношение $AN : ND$, если известно, что $AK : KB = 2 : 3$, $BL : LC = 3 : 7$, $CM : MD = 7 : 5$.

Решение: Напишем теорему Менелая для тетраэдра $ABCD$ и его сечения $KLMN$:

$$\frac{AK}{KB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MD} \cdot \frac{DN}{NA} = 1;$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{7}{5} \cdot \frac{DN}{NA} = 1;$$

$$\frac{AN}{ND} = 2{,}5.$$

10. Окружности ω и Ω касаются (ω лежит внутри Ω). Через центр Ω провели прямую, которая пересекает Ω в точках A и D, а ω — в точках B и C (точки на этой прямой идут в порядке A, B, C, D). Найдите отношение радиуса Ω к радиусу ω, если $AB : BC : CD = 3 : 7 : 2$.

Решение: Пусть O – центр Ω, $AB = 3x, BC = 7x, CD = 2x$. Тогда радиус Ω равен $(3x + 7x + 2x)/2 = 6x$. Тогда $BO = 6x - 3x = 3x, OC = 7x - 3x = 4x$. Пусть K – точка касания двух окружностей, L – диаметрально противоположная ей точка. Тогда $OK = 6x, OL = 2r - 6x$, где r – радиус ω. Тогда степень точки O относительно ω с одной стороны равна $BO \cdot OC = 12x^2$, с другой $KO \cdot OL = 6x(2r - 6x)$, то есть $12x^2 = 6x(2r - 6x)$, следовательно $r = 4x$, следовательно ответ $6x/4x = 1{,}5$.