Диагностическая работа. Решения

Задача 1. В клетках квадратной таблицы 5×5 расставлены числа 1 и –1. Известно, что строк с положительной суммой больше, чем с отрицательной. Какое наибольшее количество столбцов этой таблицы может оказаться с отрицательной суммой?

Ответ: 5

Решение. Понятно, что так как всего столбцов 5, то больше пяти ответ быть не может. Пример:

-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	1	1	1
1	1	-1	-1	1
1	1	1	1	-1

$\square$

Задача 2. Пусть $P(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$ — различные приведённые квадратные трёхчлены. Докажите, что уравнение $|P(x)| + |Q(x)| = |R(x)|$ имеет не более 8 корней.

Решение. Раскроем модули всеми способами. Так как один модудь можно раскрыть двумя способами, то 3 модуля можно раскрыть $2^3 = 8$ способами. Мы получили 8 квадратный уравнений. Однако, данные уравнения делятся на пары противоположных, и в каждой паре наборы корней совпадают. А потому, так как у каждого квадратного уравнения корней не больше 2, то всего их не больше 8. $\square$

Задача 3. На сторонах AB и AC треугольника ABC нашлись такие точки M и N, отличные от вершин, что $MC = AC$ и $NB = AB$. Точка P симметрична точке A относительно прямой BC. Докажите, что PA является биссектрисой угла MPN.

Решение. Отметим M' и N' — середины AM и AN соответственно. Тогда CM' и BN' — медианы равнобедренных треугольников ACM и BAN. Следовательно, они являются также высотами. Пусть AL — третья высота треугольника ABC, из симметрии $L \in AP$. Как известно, LA — биссектриса угла $M'LN'$. Но из симметрии также $AL = LP$, откуда следует, что $M'L$ и LN' — средние линии треугольников AMP и ANP. Следовательно, $M'L||MP$, $LN'||PN$, откуда и следует, что PA также является биссектрисой угла MPN. $\square$

Задача 4. Различные натуральные числа a, b, c, d меньше простого числа p, а числа a^4, b^4, c^4, d^4 дают одинаковые остатки при делении на p. Докажите, что $a^{2023} + b^{2023} + c^{2023} + d^{2023}$ делится на $a + b + c + d$.

Решение. Заметим, что числа x^2 и y^2 дают одинаковые остатки при делении на p тогда и только тогда, когда $x^2 ˘ y^2 = (x ˘ y)(x + y)$ делится на p, то есть либо числа x и y сравнимы по модулю p (если $x ˘ y$ делится на p), либо числа x и $˘ y$ сравнимы по модулю p (если $x + y$ делится на p). Поэтому среди чисел a^2, b^2, c^2, d^2 максимум 2 разных остатка, и каждый остаток повторяется максимум дважды. Следовательно, среди чисел a^2, b^2, c^2, d^2 две пары сравнимых по модулю p — пусть это a^2 с b^2 и c^2 с d^2. Поскольку числа a, b, c, d различны и меньше p, это возможно только если $a + b = p$ и $c + d = p$. Таким образом, $a + b + c + d = 2p$. Заметим, что $a^{2023} + b^{2023}$ делится на $a + b = p$, $c^{2013} + d^{2013}$ делится на $c + d = p$, и четность суммы у $a^{2023} + b^{2023} + c^{2023} + d^{2023}$ такова же, как $a + b + c + d$, то есть число $a^{2023} + b^{2023} + c^{2023} + d^{2023}$ чётно. Таким образом, сумма $a^{2023} + b^{2023} + c^{2023} + d^{2023}$ делится на $2p$, что и требовалось доказать. □

Задача 5. На плоскости расположены n квадратов 2×2 со сторонами, параллельными координатным осям. Ни один из этих квадратов не содержит центра другого квадрата. Некоторый прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям, содержит все эти квадраты. Докажите, что периметр этого прямоугольника не меньше $4\sqrt{n}$.

Решение. Рассмотрим n квадратов 1×1 с центрами, совпадающими с центрами исходных квадратов 2×2. Нетрудно проверить, что из условия следует, что квадраты со стороной 1 не пересекаются по внутренним точкам. Тогда площадь прямоугольника не меньше n. Если стороны прямоугольника a и b, то $P = 2(a + b) \geqslant 4\sqrt{ab} \geqslant 4\sqrt{n}$, что и требовалось. □

Задача 6. Числовая последовательность строится по закону $a_{n+2} = a_{n+1} + \sqrt{a_{n+1} + a_n}$ для $n \geqslant 1$. Можно ли подобрать два первых члена так, чтобы первые десять членов этой последовательности были натуральными числами?

Ответ: Нет.

Решение. Во-первых, начиная с 3-го члена, последовательность a_n возрастает. Во-вторых, если a_{n+2} — натуральное, то и $x_n = \sqrt{a_{n+1} + a_n}$ — тоже натуральное, при этом последовательность x_i также возрастает. Далее, $a_{n+3} = a_{n+2} + x_{n+1} = a_{n+1} + x_{n+1} + x_n$, откуда $x_{n+1} + x_n = a_{n+3} - a_{n+1} = x_{n+2}^2 - x_{n+1}^2$. Таким образом,

$$1 = \frac{x_{n+2}^2 - x_{n+1}^2}{x_{n+1} + x_n} > \frac{x_{n+2}^2 - x_{n+1}^2}{x_{n+2} + x_{n+1}} = x_{n+2} + x_{n+1}.$$

Таким образом, мы получили, что сумма двух чисел меньше единицы, а потому они оба не могут быть натуральными. Следовательно, даже первые 5 членов последовательности не могут быть целыми.

□