Диагностическая работа. Дистанционный этап.

Задача 1. Найдите значение выражения

$$f\left(\frac{1}{1000}\right)+f\left(\frac{2}{1000}\right)+\ldots+f\left(\frac{999}{1000}\right)+f\left(\frac{1000}{1000}\right)+f\left(\frac{1000}{999}\right)+\ldots+f\left(\frac{1000}{1}\right),$$

где $f(x)=\frac{x^2}{1+x^2}$.

Ответ: $999\frac{1}{2}$

Решение. Достаточно заметить, что $f(x)+f(\frac{1}{x})=1$ для ненулевого x. □

Задача 2. Взяли целые числа от нуля до ста включительно. Некоторые написали синими чернилами, а остальные красными. Если сложить два разных числа одного цвета и получится число, не превосходящее 100, то оно того же цвета, что и слагаемые. Сколько синих чисел может быть среди написанных?

Ответ: 0, 1, 2, 99, 100, 101.

Решение. Посмотрим, в какой цвет покрашена единица. Пусть она покрашена в красный цвет. Рассмотрим минимальное $n>1$, покрашенное также в красный цвет. Тогда числа $n+1, n+2, \ldots, 100$ покрашены в красный цвет, а $2, \ldots, n-1$ — синие. Тогда для $n>3$ мы получим противоречие: $n+1$ — красное, но $n-1$ и 2 — различные синие. Следовательно, либо красных чисел, больших 1, нет вообще, либо все числа, кроме, может быть, 0 и 2 — красные. Таким образом, либо синих, либо красных чисел не более 2. Случай синей единицы аналогичен.

Примеры: мы можем покрасить 0 и 1 в любые цвета, а остальные — все одновременно в красный, либо все одновременно в синий. Нетрудно понять, что таким образом можно построить примеры на все ответы. □

Задача 3. За первый год население некоторой деревни возросло на n человек, а за второй – на 525 человек. При этом за первый год население увеличилось на 525%, а за второй – на n%. Сколько жителей стало в деревне?

Ответ: 775

Решение. Пусть изначально жителей было t. Тогда через год их увеличится на $5.25t$, что также равняется n. Через 2 года их увеличится на $\frac{n}{100}(t+n)$, откуда получаем уравнение $\frac{n}{100}(t+n)=525$. После замены $n=5.25t$ остаётся $\frac{525t}{10000}6.25t=525$. Отсюда $t=40$, $n=210$ и после 2 лет население будет $40+210+525=775$. □

Задача 4. В ряд стоит n ёлок. Некоторые из них украшены гирляндой одного из 3 цветов: красного, жёлтого и синего. Известно, что ёлок с красной гирляндой ровно 30, а с жёлтой и с синей — по 20. Также никакие две рядом стоящие ёлки не могут быть украшены гирляндами разных цветов. Для какого максимального n можно заведомо утверждать, что найдётся 3 подряд идущие ёлки, украшенные гирляндами одного цвета?

Ответ: 103

Решение. Разобьём деревья на группы подряд идущих с одинаковым цветом гирлянды. Тогда если не найдётся трёх подряд идущих ёлок, украшенных гирляндами одного цвета, то в каждой группе максимум по две ёлки. Так как ёлок с гирляндой всего $30 + 20 + 20 = 70$, то групп хотя бы 35. Между любыми двумя группами есть ёлка без гирлянды, и потому таких ёлок будет хотя бы 34. Значит, всего ёлок не меньше $70 + 34 = 104$, и при $n = 103$ три подряд идущие ёлки, украшенные гирляндами одного цвета, точно найдутся.

Пример на 104 ёлки: сначала поставить 30 пар ёлок с красной гирляндой, отступая между по ёлке без гирлянды; после — 10 пар жёлтых и 10 пар синих, действуя аналогично. $\square$

Задача 5. Найдите все целые числа b, для которых найдётся целое число a, для которых верно $(2a^2 + b)^3 = b^3a$.

Ответ: $(729, 128, 0, -1)$.

Решение. Если $b = 0$, то и $a = 0$. Будем считать, что $b \neq 0$, тогда a является точным кубом (поскольку $(2a^2+b^3)^3$ и b^3 являются точными кубами). Пусть $a = c^3$, подставим это в исходное неравенство и извлечём корень третьей степени, получая $2c^6 + b = bc$, откуда $b(c-1) = 2c^6$. Поскольку c и $c-1$ взаимно просты, то 2 делится на $c - 1$, значит, $c \in \{-1, 0, 2, 3\}$. При $c = -1$ получаем $a = -1$ и $2 + b = -b$, откуда $b = -1$. Случай $c = 0$ уже был рассмотрен. При $c = 2$ получаем $a = 8$ и $128 + b = 2b$, откуда $b = 128$. При $c = 3$ получаем $a = 27$ и $2 \cdot 3^6 + b = 3b$, откуда $b = 729$. $\square$

Задача 6. Дан равносторонний треугольник ABC со стороной 3. На отрезке AC выбрана точка P, такая, что $AP = 2$. На отрезках BC и AB выбраны такие точки X и Y соответственно, что $BX = BY + 1$ и сумма $PX + PY$ минимальна. Чему равняется $(PX + PY)^2$?

Ответ: 7

Решение. Отметим на луче BC точки D и E такие, что $BD = 1$ и $BE = 4$. Тогда $BY = DX$. Отметим точку F так, что DEF — правильный, а F и A лежат по разную сторону от прямой DE. Наконец, отметим точки Q и R на стороне FE так, что $FQ = CR = 1$. Тогда треугольники AYP и EXQ равны по двум сторонам и углу между ними. Отсюда следует равенство $YP = XQ$. Далее, по неравенству треугольника $PX + PY = PX + XQ \geqslant PQ$, причём равенство достигается для точки X, являющейся точкой пересечения отрезков PQ и BC.

Найдём PQ^2. Так как треугольник CER — правильный со стороной 1, то $PR = 2$ и $\angle PRQ = 120°$. Применим теорему косинусов для треугольника PQR: $PQ^2 = QR^2 + PR^2 - 2\cos\angle PQR \cdot QR \cdot PR = 4 + 1 + 2 = 7$. □

Задача 7. Положительные числа a, b, c, d удовлетворяют системе

$$\begin{cases} a^2 + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{2}, \\ b^2 + \frac{4}{c^2} = 8, \\ c^2 + \frac{16}{d^2} = 2, \\ d^2 + \frac{4}{a^2} = 32. \end{cases}$$

Найдите, чему равно $abcd$.

Ответ: 4

Решение. Перемножив все равенства, получим $(a^2 + \frac{1}{b^2})(b^2 + \frac{4}{c^2})(c^2 + \frac{16}{d^2})(d^2 + \frac{4}{a^2}) = 2^8$. По неравенству Коши $a^2 + \frac{1}{b^2} \geqslant 2\frac{a}{b}$, причём равенство достигается, когда $a = \frac{1}{b}$. Аналогично $b^2 + \frac{4}{c^2} \geqslant 4\frac{b}{c}$ (равенство при $b = \frac{2}{c}$), $c^2 + \frac{16}{d^2} \geqslant 8\frac{c}{d}$ (равенство при $c = \frac{4}{d}$) и $d^2 + \frac{4}{a^2} \geqslant 4\frac{d}{a}$ (равенство при $d = \frac{2}{a}$). Перемножая все упомянутые неравенства, получаем, что система из условия выполняется только при $a = \frac{1}{b}, b = \frac{2}{c}, c = \frac{4}{d}, d = \frac{2}{a}$. Перемножая эти равенства, получаем $abcd = \frac{16}{abcd}$, откуда $abcd = 4$. □

Задача 8. Найдите такое наименьшее вещественное число c, что для любого натурального n и вещественных чисел $x_1, \ldots, x_n \geqslant -1$, которые удовлетворяют равенству $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 = 0$, выполняется

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant cn.$$

Ответ: $\frac{4}{3}$

Решение. Возьмём $n = 9$, $x_1 = \ldots = x_8 = -1$, $x_9 = 2$, получим $c \geqslant \frac{4}{3}$.

С другой стороны, $(x_i + 1)(x_i - 2)^2 \geqslant 0$, поэтому $x_i^3 + 4 \geqslant 3x_i^2$, откуда $4n = \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + 4n \geqslant 3\sum_{i=1}^{n} x_i^2$. □

Задача 9. Внутри треугольника ABC отметили точку P. Прямые AP, BP, CP пересекают отрезки BC, CA, AB в точках A', B', C' соответственно. Точки A'', B'', C'' симметричны точкам A, B, C относительно A', B', C'. Известно, что $S_{ABC} = S$, $S_{A'B'C'} = S_1$. Найдите $S_{A''B''C''}$.

Ответ: $3S + 4S_1$

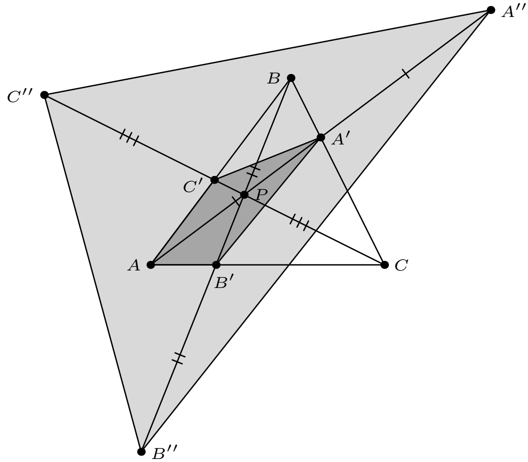

Рис. 1: к решению задачи 9

Решение. Решим эту задачу в расположении точек, приведенном на картинке (A и B лежат внутри $A''B''C''$, а C вне). Остальные расположения разбираются аналогично. Через S_M обозначим площадь многоугольника M.

Будем пользоваться следующим вспомогательным утверждением:

Если в четырехугольнике $ABCD$ отметить середину P отрезка BD, причем P и B лежат по одну сторону от AC, то $S_{ACPB} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$, а также $S_{ACP} = \frac{1}{2}(S_{ABC} - S_{ADC})$.

Это утверждение несложно проверить с помощью того, что медиана треугольника делит его на два треугольника с одинаковой площадью.

Обозначим $S_{ABC} = S, \quad S_{A'B'C'} = S_1, \quad S_{A''B''C''} = X.$

$$S_{AC'A'B'} = \frac{1}{2}S_{AC'A''B'} = \frac{1}{2}(S_{AC'A''} + S_{AB'A''}) =$$

$$= \frac{1}{4}(S_{AC''A''} - S_{ACA''} + S_{AB''A''} - S_{ABA''}) = \frac{1}{4}(S_{AC''A''B''} - S_{ABA''C} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(X - S_{AB''C''} - 2S\right)$$

Аналогично, используя расположение точек, получим

$$S_{CB'C'A'} = \frac{1}{4}(X + S_{CA''B''} - 2S)$$

$$S_{BA'B'C'} = \frac{1}{4}(X - S_{BA''C''} - 2S)$$

Сложив эти три выражения, получим

$$S + 2S_1 = \frac{1}{4}\left(3X - S_{AB''C''} + S_{CA''B''} - S_{BA''C''} - 6S\right)$$

Воспользовавшись тем, что

$$X - S_{(AB''C''} + S_{CA''B''} - S_{BA''C''} = S_{AC''BA''CB''} = 4S,$$

получим

$$S + 2S_1 = \frac{1}{4}(2X + 4S - 6S)$$

что эквивалентно тому, что

$$X = 3S + 4S_1$$

□

Задача 10. На сторонах правильного треугольника отмечено n точек (отличных от вершин треугольника) и некоторые из них соединены отрезками так, что выполняются следующие два условия: 1) на каждой стороне треугольника отмечено хотя бы по одной точке; 2) для любой пары точек X и Y, отмеченных на разных сторонах, найдётся ровно одна отмеченная точка на оставшейся стороне, соединённая и с X, и с Y, а также найдётся ровно одна отмеченная точка на оставшейся стороне, не соединённая ни с X, ни с Y. Найдите все возможные значения n?

Ответ: $n = 12$.

Решение. Обозначим множество отмеченных точек на каждой из сторон треугольника через A, B, C, а размеры этих множеств — через a, b, c соответственно. Посчитаем число x троек (p, q, r), где $p \in A, q \in B, r \in C$, таких что либо все три точки p, q, r попарно соединены, либо все три попарно не соединены. По условию каждая пара $p \in A, q \in B$ участвует ровно в одной такой тройке, поэтому $x = ab$. Также каждая пара $p \in A, r \in C$ участвует ровно в одной такой тройке, поэтому $x = ac$. Аналогично для оставшихся двух сторон получаем $x = ab = ac = bc$, откуда $a = b = c = n/3$, $x = (n/3)^2$.

Теперь посчитаем количество троек (p, q, r), $p \in A, q \in B, r \in C$, таких что p не соединено ни с q, ни с r, если сами q и r соединены отрезком, и соединено и с q, и с r в противном случае. Поскольку для каждой пары $q \in B, r \in C$, такая тройка ровно одна, то число таких троек равно $bc = (n/3)^2$. Аналогично вычисляя число подобных троек для сторон B и A, мы получаем, что число всех троек (p, q, r), $p \in A, q \in B, r \in C$ равно $4(n/3)^2$. С другой стороны, их $(n/3)^3$, поэтому $n = 12$.

В качестве примера отметим на каждой из сторон по четыре точки, пронумерованные числами 0,1,2,3. На каждой из сторон проведём отрезки от точек с чётными номерами к точкам с номерами 0 и 1 на следующей по часовой стрелке стороне, а от точек с нечётными номерами — к точкам с номерами 2 и 3 (на следующей по часовой стрелке стороне). $\square$