Диагностическая работа. Решения

Задача 1. Взяли пять натуральных чисел и для каждых двух записали их сумму. Могло ли оказаться, что все 10 получившихся сумм оканчиваются разными цифрами?

Ответ: нет.

Решение. Предположим, что это возможно. Обозначим пять исходных чисел за a_1, a_2, …, a_5, а их попарные суммы за b_1, b_2, …, b_{10}. Сумму $b_1 + b_2 + \ldots + b_{10}$ обозначим за B.

С одной стороны, каждое число a_k участвует в четырёх попарных суммах, откуда сумма B будет равна учетверённой сумме $a_1 + a_2 + \ldots + a_5$. Следовательно, B должна быть чётной.

С другой стороны, если все 10 сумм b_i оканчиваются разными цифрами, то последняя цифра их суммы B должна быть такой же, как и у суммы $0 + 1 + 2 + \ldots + 9 = 45$. Следовательно, B должна быть нечётной. Противоречие. □

Задача 2. У детей есть шарики десяти различных цветов и 120 одинаковых по виду коробок. В каждой коробке лежит по три шарика трёх различных цветов, причем в любых двух коробках лежат разные наборы цветов. Учитель хочет написать на каждой коробке цвет одного из шариков, лежащих в ней, таким образом, чтобы дети, видя эти 120 надписей (но не зная, в каком порядке расположены коробки), смогли хотя бы про одну коробку с уверенностью сказать, шарики каких трёх цветов в ней лежат. Сможет ли он это сделать?

Ответ: да.

Решение. Во-первых, отметим, что способов выбрать три различных шарика из 10 данных всего $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$; то есть в коробках присутствуют все возможные комбинации из трёх различных шариков.

Пусть учитель пронумерует цвета числами от 1 до 10 и напишет на каждой коробке цвет с наименьшим номером из тех, что есть на лежащих в ней шариках. Докажем, что в этом случае дети смогут однозначно определить коробку, в которой лежит тройка $\{7, 8, 9\}$.

Цвета 7, 8, 9 будет называть *большими,* а остальные — *маленькими.* Можно заметить, что есть ровно 119 троек шаров, в которых хотя бы один цвет — маленький (это все тройки, кроме $\{7, 8, 9\}$). При этом дети видят ровно 119 коробок, на которых написан маленький цвет. Значит, во всех этих коробках должны быть тройки шаров, среди которых один цвет маленький; а в оставшейся коробке должна быть тройка $\{7, 8, 9\}$. □

Задача 3. Пусть для натурального n выполнены неравенства

$$\text{НОД}(n, n+1) < \text{НОД}(n, n+2) < \ldots < \text{НОД}(n, n+2022).$$

Докажите, что $\text{НОД}(n, n+2022) < \text{НОД}(n, n+2023)$.

Решение. Будем обозначать НОД(a,b) просто как (a,b). Мы знаем, что $(n,n+k)=(n,k)\leqslant k$. Отсюда следует, что $(n,n+1)=1$. Далее мы имеем $1=(n,n+1)<(n,n+2)\leqslant 2$, откуда $(n,n+2)=2$. Аналогично для любого $1\leqslant k\leqslant 2022$ получаем, что $(n,n+k)$ по условию превосходит по крайней мере $k-1$ натуральных чисел $(n,n+i)$ для $i<k$, то есть $k\leqslant(n,n+k)\leqslant k$, откуда $(n,n+k)=k$.

Из $(n,n+k)=k$ следует $n\ \vdots\ k$ для $k=1,2,\dots,2022$. Докажем, что также $n\ \vdots\ 2023$. Из разложения $2023=7\cdot 17^2$ ясно, что для этого достаточно $n\ \vdots\ 7$ и $n\ \vdots\ 17^2$, а это мы уже доказали.

Осталось заметить, что $(n,n+2023)=(n,2023)=2023$, то есть искомое неравенство обращается в $2022<2023$. □

Задача 4. Центр окружности ω_1 лежит на окружности ω_2, окружности пересекаются в точках M, N. На окружности ω_1 отмечены диаметрально противоположные друг другу точки A и B. Прямая MA пересекает ω_2 в точке C, а прямая BN пересекает ω_2 в точке D. Докажите, что $2CD=AB$.

Решение. Обозначим центр ω_1 за O_1, а её радиус за r_1 (рис. 1). Достаточно доказать, что $CM\parallel DO_1$. Это будет означать, что CDO_1M — трапеция, причём равнобедренная (так как она вписана в окружность), и $CD=O_1M=r_1=AB/2$.

Имеем $\angle MO_1D=\angle MND=\angle MAB=\angle O_1MA$; равенства в этой цепочке следуют соответственно из вписанности в ω_2, вписанности в ω_1 и из равнобедренности треугольника AO_1M. Получаем, что прямые CM и DO_1 параллельны (равны накрест лежащие углы $\angle O_1MA=\angle MO_1D$), что и требовалось. □

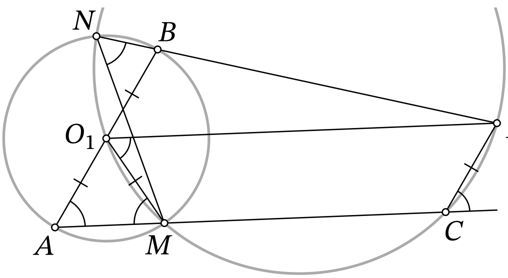

Рис. 1: к решению задачи 4

Другое решение. Как и в предыдущем решении, центр окружности ω_1 обозначим за O_1. Можно доказать, что AO_1DC — параллелограмм, из чего сразу следует требуемое. Параллельность прямых AC и O_1D доказывается так же, как и в предыдущем решении, а параллельность AB и CD следует из того, что прямые AB и MN антипараллельны относительно пары прямых AC и ND, и прямые MN и CD также антипараллельны относительно этой пары прямых. (Или просто из цепочки равенств $\angle CAB=\angle MNB=\pi-\angle MCD$.) □

Задача 5. Пусть p — нечетное простое число. Докажите, что

$$\sum_{k=1}^{p-1} k^{2p-1} \equiv \frac{p(p+1)}{2} \pmod{p^2}.$$

Решение. Разобьём числа k^{2p-1} на пары «противоположных» по модулю p, то есть k^{2p-1} сопоставим $(p-k)^{2p-1}$. Раскроем скобки в выражении $(p-k)^{2p-1}$ согласно биному Ньютона. Заметим, что все слагаемые, в которых степень p равна хотя бы 2, сравнимы с 0 по модулю p^2. Остается:

$$(p-k)^{2p-1} \equiv \mathrm{C}_{2p-1}^{1} \cdot p \cdot k^{2p-2} - k^{2p-1} \pmod{p^2},$$

где $\mathrm{C}_{2p-1}^{1} = 2p-1$. Тогда в паре «противоположных» получаем:

$$k^{2p-1} + (p-k)^{2p-1} \equiv (2p-1)pk^{2p-2} \equiv -pk^{2p-2} \pmod{p^2}.$$

Возвращаясь к исходной сумме, имеем

$$\sum_{k=1}^{p-1} k^{2p-1} \equiv \sum_{k=1}^{(p-1)/2} \left(k^{2p-1} + (p-k)^{2p-1}\right) \equiv p \cdot \sum_{k=1}^{(p-1)/2} (-k^{2p-2}) \pmod{p^2}.$$

Так как $px \equiv py \pmod{p^2}$ эквивалентно $x \equiv y \pmod{p}$, то осталось показать

$$\sum_{k=1}^{(p-1)/2} (-k^{2p-2}) \equiv \frac{p+1}{2} \pmod{p}.$$

Но $k^{2p-2} \equiv (k^{p-1})^2 \equiv 1^2 \equiv 1 \pmod{p}$ по малой теореме Ферма для всех k, не кратных p, откуда

$$\sum_{k=1}^{(p-1)/2} (-k^{2p-2}) \equiv \frac{p-1}{2} \cdot (-1) \equiv p - \frac{p-1}{2} \equiv \frac{p+1}{2} \pmod{p}.$$

□

Задача 6. В 10 «А», 10 «Б» и 10 «В» классах суммарно учатся 100 учеников, некоторые пары из которых дружат (взаимно). Назовём школьника *необычным,* если все его друзья учатся в одном классе. Докажите, что можно перевести одного из учеников в другой класс так, чтобы не появилось новых необычных школьников.

Решение. Всего существует 200 возможных способов перевести некоторого ученика в другой класс. Предположим, что ни один из них не удовлетворяет условию. Каждому из способов сопоставим учеников, который не был, но станет необычным после такого перевода. Тогда каждому способу должен быть сопоставлен хотя бы один ученик.

Пусть некоторый ученик X станет необычным после перевода какого-то ученика Y в другой класс. Тогда у X должно быть хотя бы два друга (иначе он необычен изначально), и все его друзья кроме Y должны быть в одном классе (и это должен быть тот класс, куда переводят Y).

Пусть некоторому ученику X соответствуют два возможных способа перевести одного из его друзей в другой класс так, чтобы X стал необычным. Тогда у X есть ровно два друга, и эти друзья должны быть из разных классов. (Кроме того, ясно, что три и более способов перевода не могут соответствовать одному ученику.)

Таким образом, каждый из 200 способов перевести учеников сопоставляется хотя бы одному ученику, и каждому из 100 учеников сопоставляется не более 2 способов; это означает, что каждому ученику сопоставляется ровно два способа. Следовательно, каждый школьник имеет ровно двух друзей, и они из разных классов.

Рассмотрим граф, вершинами которого являются ученики; ребрами соединены пары друзей. Так как из каждой вершины выходят ровно два ребра, то граф разбивается на циклы. А так как суммарное количество учеников не делится на 3, то найдётся цикл, длина которого также не делится на 3.

Рассмотрим данный цикл и пронумеруем вершины по порядку. Тогда ученики с номерами $x-2$, x, $x+2$ должны учиться в разных классах, так как иначе можно перевести x в класс, отличный от классов $x-2$ и $x+2$, и среди $x+1$ и $x-1$ новых необычных школьников не появится (а для остальных ничего поменяться и не может). Отсюда следует, что ученики с номерами x и $x+6$ должны учиться в одном классе — не в том, в котором учатся $x+2$ и $x+4$. Таким образом, ученики с номерами x, $x+6$, $x+12$, … учатся в одном классе. Так как длина цикла не делится на 3, то мы получим, что ученики x и $x+2$ учатся в одном классе. Это противоречит тому, что ученики с номерами $x-2$, x, $x+2$ должны учиться в разных классах. $\square$