Диагностическая работа. Дистанционный этап. Решения.

Задача 1.1. В мебельном магазине есть четыре отдела: с кроватями, тумбочками, столами и стульями. При этом в продаже имеется 3 вида кроватей, 4 вида тумбочек, 5 видов столов и 4 вида стульев. Сколько существует способов купить в магазине несколько (возможно, один) предметов, чтобы они все были из разных отделов?

Ответ: 599.

Решение. В каждом отделе можно выбрать один из видов предметов, либо не выбрать ничего. Это дает $4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 5 = 600$ вариантов. При этом один вариант — когда ни один предмет не выбран — нам не подходит. Остается 599 вариантов. □

Задача 1.2. В мебельном магазине есть четыре отдела: с кроватями, тумбочками, столами и стульями. При этом в продаже имеется 3 вида кроватей, 3 вида тумбочек, 6 видов столов и 4 вида стульев. Сколько существует способов купить в магазине несколько (возможно, один) предметов, чтобы они все были из разных отделов?

Ответ: 559.

Задача 2.1. В мешке фокусника находятся 100 карт четырёх мастей (карт каждой масти не обязательно поровну). Известно, что если взять наугад любые 90 карт, то среди них обязательно встретятся все четыре масти. Какое наименьшее количество карт надо взять, чтобы среди них наверняка нашлись карты трёх мастей?

Ответ: 79.

Решение. Сначала заметим, что в каждой масти есть хотя бы 11 карт. Действительно, если в какой-то масти не более 10 карт, то можно выбрать 90 карт, не содержащих эту масть, и получить противоречие с условием. Более того, любая конфигурация 100 карт, в которой в каждой масти есть хотя бы по 11 карт, подходит под условие задачи.

Пусть выбраны некоторые 79 карт. Тогда среди них есть хотя бы три различные масти — в ином случае две незатронутые масти должны полностью содержаться в оставшихся 21 карте, что невозможно.

С другой стороны, 78 карт может не хватить, если в мешке есть по 39 карт двух мастей и по 11 карт двух других мастей, так как может оказаться, что мы выбрали целиком две первые масти. □

Задача 2.2. В мешке фокусника находятся 100 карт четырёх мастей (карт каждой масти не обязательно поровну). Известно, что если взять наугад любые 85 карт, то среди них обязательно встретятся все четыре масти. Какое наименьшее количество карт надо взять, чтобы среди них наверняка нашлись карты трёх мастей?

Ответ: 69.

Задача 3.1. На полке в библиотеке в ряд стоят 10 книг. Иногда хулиган Вася приходит и меняет местами какие-нибудь две соседние книги. Какое минимальное количество раз Вася должен прийти в библиотеку, чтобы после его ухода каждая книга побывала как на первом месте, так и на последнем?

Ответ: 65.

Решение. Пример. Передвинем первую книгу на 5-е место, затем вторую — на 4-е, затем третью — на 3-е, затем четвёртую — на 2-е. В результате пятая книга окажется на первом месте. Итого, за $4+3+2+1=10$ обменов каждая из книг 1–5 побывала на первом месте. Аналогично можно сделать 10 обменов так, чтобы книги 6–10 встали в обратном порядке, и каждая из книг 6–10 побывала на последнем месте. После за 25 обменов подвинем каждую из книг 1–5 на 5 позиций вправо (меняя их только с книгами 6–10, а не друг с другом). Затем, аналогично первым действиям, мы можем за 10 обменов поменять книги 1–5 так, чтобы каждая из них побывала на последнем месте; и ещё за 10 — поменять книги 6–10 так, чтобы каждая из них побывала на первом месте. В итоге мы добились требуемого за 65 обменов.

Оценк.1. Для каждой книги отметим два *особых* момента: какой-нибудь момент, когда книга побывала на первом месте, и какой-нибудь момент, когда книга побывала на последнем месте. Первый особым моментом книги будем называть тот особый момент, что случился хронологически раньше.

Для каждой книги подсчитаем количество обменов, в которых данная книга участвует, и найдём сумму по всем книгам. Так как в каждом обмене участвует две книги, то полученный результат будет в 2 раза больше общего количества обменов.

С другой стороны, для каждой книги мы можем разбить обмены, в которой она участвует, на три класса: *ранние* — до первого особого момента, *средние* — между особыми моментами, и *поздние* — после второго особого момента.

Очевидно, что для каждой книги существует не менее 9 средних обменов. Найдём минимальное суммарное количество ранних обменов. Для книг на 1 и 10 местах ранних обменов могло не быть, для книг на 2 и 9 местах должен быть хотя бы 1 ранний обмен, …, для книг на 5 и 6 местах должны найтись хотя бы 4 ранних обменов. Итого, ранних обменов не менее $2\cdot(0+1+2+3+4)=20$. Аналогично, поздних обменов не менее 20. Итого, подсчитываемая величина не менее $10\cdot 9+20+20=130$. Следовательно, требуется не менее $\frac{1}{2}\cdot 130=65$ обменов. □

Задача 3.2. На полке в библиотеке в ряд стоят 12 книг. Иногда хулиган Вася приходит и меняет местами какие-нибудь две соседние книги. Какое минимальное количество раз Вася должен прийти в библиотеку, чтобы после его ухода каждая книга побывала как на первом месте, так и на последнем?

Ответ: 96.

Задача 4.1. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC отметили точки D, E и F так, что $BD = BE$ и $CE = CF$. Отметили точку I пересечения биссектрис треугольника ABC. Найдите $\angle FID$, если известно, что $\angle BAC = 53°$.

Ответ: $127°$.

Решение. Отметим, что поскольку треугольник BDE равнобедренный, то $\angle BED = 90° - \frac{1}{2}\angle ABC$. Аналогично $\angle CEF = 90° - \frac{1}{2}\angle ACB$. Тогда $\angle DEF = 180° - \angle BED - \angle CEF = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB) = 90° - \frac{1}{2}BAC$. Далее заметим, что BI и CI являются серединными перпендикулярами к отрезкам DE и EF соответственно, а значит, I является центром описанной окружности треугольника DEF. По теореме о центральном угле, $\angle FID = 2\angle DEF = 180° - \angle BAC = 127°$. □

Задача 4.2. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC отметили точки D, E и F так, что $BD = BE$ и $CE = CF$. Отметили точку I пересечения биссектрис треугольника ABC. Найдите $\angle FID$, если известно, что $\angle BAC = 49°$.

Ответ: $121°$/

Задача 5.1. Положительное число x таково, что $[x] \cdot \{x\} = 2022$. Чему может быть равно $[x^2] - [x]^2$? (Здесь $[a]$ обозначает целую часть числа a, а $\{a\}$ — дробную.)

Ответ: $\{4044\}$.

Решение. Заметим, что $[x]\cdot\{x\} = [x](x-[x]) = x\cdot[x]-[x]^2$. С другой стороны, $x^2-x\cdot[x] = x(x-[x]) = x\cdot\{x\} = ([x]+\{x\})\cdot\{x\} = [x]\cdot\{x\}+\{x\}^2$. Получаем

$$x^2 - [x]^2 = (x^2 - x\cdot[x]) + (x\cdot[x] - [x]^2) = [x]\cdot\{x\} + \{x\}^2 + [x]\cdot\{x\} = 2[x]\cdot\{x\} + \{x\}^2 .$$

Так как $\{x\}^2 \in [0;1)$, то $x^2 - [x]^2 \in [4044;4045)$. Теперь обратимся к искомой величине:

$$[x^2] - [x]^2 = x^2 - [x]^2 - \{x^2\} .$$

Так как $\{x^2\} \in [0;1)$, то $[x^2] - [x]^2 \in (4043;4045)$. Но это целое число, поэтому оно равно 4044. □

Задача 5.2. Положительное число x таково, что $[x] \cdot \{x\} = 2021$. Чему может быть равно $[x^2] - [x]^2$? (Здесь $[a]$ обозначает целую часть числа a, а $\{a\}$ — дробную.)

Ответ: $\{4042\}$.

Задача 6.1. В физико-математическом классе учатся 24 физика и несколько математиков, некоторые пары из которых дружат (взаимно). При этом каждый физик дружит ровно с тремя физиками, и каждый математик дружит ровно с тремя физиками. Также известно, что у любых двух дружащих физиков есть хотя бы один общий друг-математик. Какое минимальное количество математиков может быть в классе?

Ответ: 16.

Решение. Сначала докажем, что количество математиков M составляет не менее $2/3$ от количества физиков F. Для этого достаточно показать, что каждый физик дружит хотя бы с двумя математиками (в этом случае количество дружб между физиками и математиками с одной стороны равно $3M$, а с другой — не меньше $2F$, что дает неравенство $3M \geqslant 2F$, эквивалентное требуемому).

Предположим, что это не так. Рассмотрим физика f, который дружит не более чем с одним математиком. У f есть три друга-физика, с каждым из которых у него должен быть общий друг-математик; получается, что это тот единственный математик m, с которым дружит f. Но если теперь рассмотреть m, то окажется, что он дружит не менее чем с четырьмя физиками — с f и с его друзьями. Противоречие с условием.

Осталось привести пример с 16 математиками. Для этого достаточно привести пример с 6 физиками и 4 математиками, а потом скопировать его 4 раза. Расположим 6 физиков в вершинах октаэдра (рис. 1). Выберем четыре грани октаэдра так, чтобы среди них не было соседних (отмечены синим), и поставим в них математиков; каждого математика подружим с тремя физиками, расположенными в вершинах соответствующей грани. Также выберем три попарно несмежных ребра октаэдра (отмечены красным) и выкинем их; для каждого из оставшихся ребер подружим соединенных им физиков между собой. Нетрудно видеть, что каждое ребро является стороной одной из выбранных граней, то есть у каждых двух друзей-физиков есть общий друг-математик. □

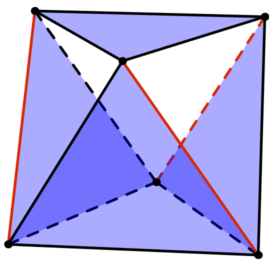

Рис. 1: к решению задачи 6.1

Задача 6.2. В физико-математическом классе учатся 30 физиков и несколько математиков, некоторые пары из которых дружат (взаимно). При этом каждый физик дружит ровно с тремя физиками, и каждый математик дружит ровно с тремя физиками. Также известно, что у любых двух дружащих физиков есть хотя бы один общий друг-математик. Какое минимальное количество математиков может быть в классе?

Ответ: 20.

Задача 7. Целые x, y удовлетворяют уравнению

$$x^2 + 3x + 9 = 9y^2.$$

Найдите все возможные значения $x + y$.

Ответ: $\{-4, -2, -1, 1\}$.

Решение. Заметим, что $9y^2 = x^2 + 3x + 9 = (x + \frac{3}{2})^2 + \frac{27}{4}$, откуда

$$\frac{27}{4} = (3y)^2 - \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \left(3y - \left(x + \frac{3}{2}\right)\right)\left(3y - \left(x + \frac{3}{2}\right)\right).$$

Умножив обе части предыдущего равенства на 4, получим

$$27 = (6y - 2x - 3)(6y + 2x + 3).$$

Из условия нетрудно понять, что x делится на 3, следовательно, оба множителя правой части последнего равенства также делятся на 3. Тогда мы имеем 4 способа разложить 27 на два множителя, кратных трём: $27 = 3 \cdot 9 = 9 \cdot 3 = (-3) \cdot (-9) = (-9) \cdot (-3)$. В каждом из случаев мы получаем систему из двух линейных уравнений с двумя переменными, решая которые, мы получаем ответы $(x, y) = (0, 1), (-3, 1), (-3, -1), (0, -1)$ соответственно. □

Задача 8.1. Коля купил несколько литровых бутылок с водой, квасом и лимонадом. После того, как он выпил 97% воды, 54% кваса и 11% лимонада, оказалось, что Коля выпил ровно 30% купленной жидкости. Какое наименьшее количество бутылок с жидкостью мог купить Коля?

Ответ: 43.

Решение. Обозначим через x, y и z количества бутылок с водой, квасом и лимонадом соответственно. Из условия следует равенство $97x + 54y + 11z = 30(x + y + z)$. Вычитая из обеих частей равенства по $54(x + y + z)$, получаем равенство $43x - 43z = -24(x + y + z)$. Так как числа 43 и 24 взаимно просты, получаем, что $x+y+z$ делится на 43, следовательно, не меньше 43. А в случае $x = 0, y = 19, z = 24$ Коля купит ровно 43 бутылки. □

Задача 8.2. Коля купил несколько литровых бутылок с водой, квасом и лимонадом. После того, как он выпил 86% воды, 49% кваса и 12% лимонада, оказалось, что Коля выпил ровно 30% купленной жидкости. Какое наименьшее количество бутылок с жидкостью мог купить Коля?

Ответ: 37.

Задача 9. В квадрате $ABCD$ отметили середину M стороны AB. Перпендикуляр к MC, проходящий через точку M, пересекает AD в точке K. Найдите отношение $\frac{KD}{KC}$.

Ответ: 3/5.

Решение. Так как $\angle KAM = \angle MBC = 90°$ и $\angle CKM = 90° - \angle KMC = \angle BMC$, то треугольники CKM и BMC подобны. Из подобия следует, что $CK : CM = BM : BC$. Учитывая

$AM = BM = \frac{1}{2}BC$, получаем $CK = \frac{1}{4}BC$, откуда $KD = \frac{3}{4}AD$. Далее, применив теорему Пифагора к треугольнику KDC, мы имеем $KC^2 = KD^2 + CD^2 = \frac{3^2}{4^2}CD^2 = \frac{25}{16}CD^2$, откуда $KC = \frac{5}{4}CD$. Следовательно, $\frac{KD}{KC} = \frac{KD}{AD} \cdot \frac{CD}{KD} = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} = \frac{3}{5}$. □

Задача 10.1. В каждой клетке таблицы 5×5 стоит по действительному числу. Произведение чисел в любых двух соседних по стороне клетках равно 1. Найдите минимальное возможное значение квадрата суммы всех чисел в таблице.

Ответ: 624.

Решение. Раскрасим клетки таблицы в чёрный и белый цвета в шахматном порядке, причём угловые клетки сделаем чёрными. Пусть в одной из чёрных клеток стоит число x; тогда в соседних белых стоит число $\frac{1}{x}$; в соседних с ними чёрных — опять x и т. д.

Получаем, что всего в таблице есть 13 чисел x на чёрных клетках и 12 чисел $\frac{1}{x}$ на белых. Если x отрицательное, то можно поменять знаки всех чисел — квадрат их суммы от этого не изменится. Далее считаем, что все числа положительные.

Сумма чисел равна $13x + 12/x$. По неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим эта величина не меньше $2\sqrt{13x \cdot 12/x} = 2\sqrt{156}$, а её квадрат, соответственно, не меньше $4 \cdot 156 = 624$. Это значение достигается тогда же, когда и равенство в неравенстве о средних: при $13x = 12/x$, то есть $x = \sqrt{12/13}$. □

Задача 10.2. В каждой клетке таблицы 3×3 стоит по действительному числу. Произведение чисел в любых двух соседних по стороне клетках равно 2. Найдите минимальное возможное значение квадрата суммы всех чисел в таблице.

Ответ: 160.

Задача 11. В прямоугольнике $ABCD$ середину стороны CD обозначили за T. Отрезки BT и AC пересекаются в точке M. Точка E вне прямоугольника такова, что $AE = BE$ и $\angle AEB = 90°$. Известно, что $BE = BC = \sqrt{2} - 1$. Найдите площадь четырехугольника $AEBM$.

Ответ: 1/6.

Решение. Для общности обозначим $BE = BC = x$, а потом подставим $x = \sqrt{2} - 1$. Из равнобедренного прямоугольного треугольника AEB видно, что $AB = \sqrt{2}x$. Из теоремы Пифагора также следует, что $AC = \sqrt{3}x$.

Заметим, что треугольники ABC и BCT подобны, так как $\angle ABC = \angle BCT = 90°$ и $\frac{AB}{BC} = \sqrt{2}$ и $\frac{BC}{CT} = x \,/\, (0{,}5 \cdot \sqrt{2}x) = \sqrt{2}$.

Отсюда следует, что $\angle CAB = \angle TBC = 90° - \angle ABM$, что дает $\angle AMB = 90°$. А значит, треугольник AMB подобен треугольнику ABC, то есть $BM = BC \cdot \frac{AB}{AC} = x\sqrt{\frac{2}{3}}$ и $AM = AB \cdot \frac{AB}{AC} = \sqrt{2}x \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Наконец, $S_{AEBM} = S_{AEB} + S_{ABM} = \frac{AE \cdot EB}{2} + \frac{BM \cdot AM}{2} = \frac{1}{2}\left(x^2 + \sqrt{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot x^2\right) = \frac{x^2}{6}(3 + 2\sqrt{2})$.

Подставив $x = \sqrt{2} - 1$, получим, что $x^2 = (\sqrt{2} - 1)^2 = 3 - 2\sqrt{2}$ и

$$S_{AEBM} = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{6}(3 + 2\sqrt{2}) = \frac{1}{6}. \qquad \square$$