Многочлены Чебышева

Многочлены Чебышёва первого рода определяются реккурентно:

$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$

Многочлены Чебышёва второго рода определяются реккурентно:

$U_0(x) = 1, \quad U_1(x) = 2x, \quad U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x)$

1. **(а)** Найдите значения $T_n(x)$ и $U_n(x)$ в точках $-1, 0$ и 1.

(б) Найдите корни $T_n(x)$ и $U_n(x)$.

2. Докажите $T_n(\cos\varphi) = \cos(n\varphi)$ и $U_{n-1}(\cos\varphi) = \frac{\sin(n\varphi)}{\sin(\varphi)}$.

3. Докажите тождества

(а) $T_n(x) + \sqrt{x^2-1}U_{n-1}(x) = (x+\sqrt{x^2-1})^n$

(б) $T_{nm}(x) = T_n(T_m(x)) = T_m(T_n(x))$

(в) $T_n(x)^2 - (x^2-1)U_{n-1}(x)^2 = 1$

(г) $T_{n+1}(x) = xU_n(x) - U_{n-1}(x)$

4. Рассмотрим выражение $R_n(x) = x - \frac{1}{x - \frac{1}{x - \frac{1}{\cdots - \frac{1}{x - \frac{2}{x}}}}}$. Докажите, что

$$R_n(x) = \frac{1}{2}\frac{T_n(x)}{T_{n-1}(x)}$$

Рассмотрим приведенный многочлен $P_n(x) = \frac{T_n(x)}{2^{n-1}}$.

5. **(а)** Докажите, что $\max\limits_{|x|<1} |P_n(x)| = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

(б) Рассмотрим приведенный многочлен $Q(x)$ степени n. Докажите, что если $\max\limits_{|x|<1} |Q(x)| \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$, то $Q = P_n$.

Таким образом, $P_n(x)$ — приведенный многочлен степени n, который меньше всего отклоняется от нуля на отрезке $[-1, 1]$.

---

6. Дан приведённый многочлен $P(x)$ с действительными коэффициентами степени $n \geqslant 1$. Докажите, что существует такая точка $y \in [0, n]$, что $|P(y)| \geqslant \dfrac{n!}{2^n}$.

7. Рассмотрим многочлены $P_1(x) = x^2 - 2$ и $P_n(x) = P_1(P_{n-1}(x))$ для $n = 2, \ldots$. Докажите, что для всех натуральных n корни уравнения $P_n(x) = x$ вещественны и различны.

8. Рассмотрим многочлен $T_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1x^1 + a_0$ с натуральными коэффициентами такой, что для каждого $t \neq 0$ выполнено $T_n(t + \frac{1}{t}) = t^n + \frac{1}{t^n}$. Докажите, что $(a_i, n) > 1$ для всех $0 \leqslant i \leqslant n-1$.

9. Рассмотрим многочлен $P(x)$ степени n такой, что $|P(x)| \leqslant 1$ для всех $-1 \leq x \leq 1$. Докажите, что

$$\left|P\left(\frac{1}{x}\right) \cdot x^n\right| \leqslant 2^{n-1}$$

для всех $-1 \leqslant x \leqslant 1, x \neq 0$.

10. Рассмотрим $P(x) = P_1(x) = 4x^3 - 3x$ и $= P_{n+1}(x) = P(P_n(x))$. Пусть $S(n)$ суть множество корней уравнения $P_n(x) = x$. Докажите, что $S(n) \subseteq S(2n)$ и произведение элементов $S(n)$ совпадает со средним арифметическим значений $S(2n)$.