LTE–лемма

Для простого числа p и целого ненулевого числа x обозначим через $\|x\|_p$ наибольшую степень p, на которую делится x. Иногда такую степень обозначают через $\nu_p(x)$.

LTE-лемма. 1. Пусть x и y — различные ненулевые целые числа, p — нечетное простое число, не являющееся делителем x и y и такое, что $p \mid x - y$. Тогда для любого натурального n выполнено равенство $\|x^n - y^n\|_p = \|x - y\|_p + \|n\|_p$.
2. Пусть x и y — различные целые числа, p — нечетное простое число, не являющееся делителем x и y и такое, что $p \mid x + y$. Тогда для любого нечетного натурального n выполнено $\|x^n + y^n\|_p = \|x + y\|_p + \|n\|_p$.
3. Пусть x и y — различные нечетные целые числа и $4 \mid x - y$. Тогда для любого натурального n выполнено $\|x^n - y^n\|_2 = \|x - y\|_2 + \|n\|_2$.

Сразу заметим, что п.2 LTE-леммы сразу следует из п.1 заменой y на $-y$, поэтому борьба пойдет лишь за пп. 1 и 3.

1. Пусть p — простое число, а числа x и y не делятся на p.
(а) Известно, что $x \equiv_p y$. Докажите, что $x^p \equiv_{p^2} y^p$.
(б) Докажите, что LTE-лемма справедлива для случая, когда n не делится на p.
(в) Чему может равняться НОД чисел $x - y$ и $(x^p - y^p)/(x - y)$, если $(x, y) = 1$?
(г) Докажите LTE-лемму.

2. Дано простое число p и натуральные числа a и n. Докажите, что если $2^p + 3^p = a^n$, то $n = 1$.

3. Решить уравнение $3^x = 2^x \cdot y + 1$ в натуральных числах.

4. Пусть натуральные числа x, y, p, n, k таковы, что $x^n + y^n = p^k$. Докажите, что если число $n > 1$ — нечетное, а число p — простое нечетное, то n является степенью числа p с натуральным показателем.

5. Докажите, что если $3^n - 2^n = p^a$ для некоторых натуральных n, a и простого p, то тогда n — простое.

6. Найдите все такие натуральные n, что при некоторых взаимно простых x и y и натуральном $k > 1$ выполняется равенство $3^n = x^k + y^k$.

7. На сколько нулей заканчивается число $4^{5^6} + 6^{5^4}$?

8. Пусть m — нечетное натуральное число, $m > 3$. Найти наименьшее натуральное n, такое, что $2^{2022} \mid m^n - 1$.