

ЧУМЫ

Определение. *Частично упорядоченным множеством* называют ориентированный граф без петель и кратных стрелок, для которого выполнено свойство транзитивности: для любых трех вершин u, v, w таких, что $u \rightarrow v$ и $v \rightarrow w$, верно $u \rightarrow w$.

Определение. *Цепью* называется последовательность вершин вида $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_n$. *Антицепью* называется набор вершин, попарно не соединённых рёбрами.

Теория

1. (а) Докажите, что в частично упорядоченном множестве размер максимальной цепи равен минимальному количеству антицепей, на которые оно разбивается. (б) Докажите, что в частично упорядоченном множестве количество элементов не больше размера максимальной антицепи, умноженного на размер максимальной цепи.
2. Построим по частично упорядоченному множеству M двудольный граф G следующим образом. В левую долю G поместим копии элементов M . В правую долю G тоже поместим копии элементов M . Вершина u левой доли соединена с вершиной v правой доли тогда и только тогда, когда в M верно $u \rightarrow v$.

(а) Докажите, что размер минимального разбиения M на цепи равен

$$|M| - (\text{размер максимального паросочетания в } G)$$

(б) Докажите, что размер максимальной антицепи в множестве M равен

$$|M| - (\text{размер минимального вершинного покрытия ребер в } G)$$

(в) **Теорема Дилуорса.** Докажите, что в частично упорядоченном множестве размер максимальной антицепи равен минимальному количеству цепей, на которые оно разбивается.

Задачи

3. Для данных натуральных r и s покажите, что любая последовательность различных чисел длины $rs + 1$ содержит монотонно возрастающую подпоследовательность длины $r + 1$ или монотонно убывающую длины $s + 1$.
4. У хозяйки дома есть 100 пакетов. Известно, что среди любых 10 пакетов один из пакетов лежит в другом. Докажите, что можно выбрать 11 пакетов так, чтобы первый пакет лежал во втором, второй — в третьем, ..., десятый — в одиннадцатом.

5. В чемпионате по футболу участвуют 30 команд разной силы игры, и футбольный эксперт точно знает, как именно команды упорядочены по силе. За одну операцию разрешается предложить эксперту список из трёх команд, и он на своё усмотрение назовёт либо самую сильную, либо самую слабую команду из этих трёх (при этом дополнительно сообщив, сильную или слабую команду он назвал). Определите максимально число k , для которого с помощью нескольких операций можно найти такую последовательность команд T_1, T_2, \dots, T_k , что для всех $1 \leq i < j \leq k$ команда T_i гарантированно слабее команды T_j .
6. Рассмотрим все (а) прямоугольники (б) параллелепипеды с целыми сторонами, не превосходящими 1000. Какое максимальное количество таких прямоугольников/параллелепипедов можно выделить, чтобы ни один из них нельзя было поместить в другой так, чтобы их стороны были попарно параллельны?
7. Вершины графа покрашены в k цветов правильным образом, при этом в $k - 1$ цвет их покрасить нельзя. Цвета перенумерованы числами от 1 до k . Докажите, что можно выбрать путь, состоящий из k вершин, в котором i -я вершина была бы покрашена в i -й цвет.
8. Рёбра полного ориентированного графа на $n^2 + 1$ вершине раскрашены в два цвета, причём одноцветных циклов нет. Докажите, что в графе существует одноцветный путь длины n .