Двусвязные графы

Определение. Вершина связного графа называется *точкой сочленения*, если при её удалении граф теряет связность.

Определение. Связный граф называется *двусвязным*, если в нём больше одной вершины и при удалении любой его вершины (и всех выходящих из неё рёбер) получается связный граф.

1. **(а)** Рёбра e_1, e_2 и e_3 графа G таковы, что существует простой цикл, проходящий через e_1 и e_2, и существует простой цикл, проходящий через e_2 и e_3. Докажите, что существует простой цикл, проходящий через e_1 и e_3.

(б) Докажите, что в двусвязном графе любые два ребра лежат на общем простом цикле.

2. В двусвязном графе есть цикл нечётной длины. Докажите, что в этом графе есть простой цикл нечетной длины, проходящий через данную вершину v.

Определение. *Блоком* связного графа G называется максимальный по включению двусвязный подграф графа G.

3. Пусть G — связный граф, а B_1 и B_2 — два различных блока этого графа. Тогда множества вершин блоков B_1 и B_2 либо не пересекаются, либо в пересечении имеют ровно одну вершину, являющуюся точкой сочленения.

Определение. Пусть $B_1, B_2, \ldots, B_n$ — все блоки связного графа G, а $a_1, a_2, \ldots,$ a_m — все его точки сочленения. Построим *дерево блоков и точек сочленения* $B(G)$ с вершинами $B_1, B_2, \ldots, B_n, a_1, a_2, \ldots, a_m$, в котором вершины a_i и B_j соединены ребром тогда и только тогда, когда точка сочленения a_i является одной из вершин блока B_j.

4. Докажите, что дерево блоков и точек сочленения связного графа действительно является деревом, причём все его висячие вершины соответствуют блокам.

5. Для любого $k \in \mathbb{N}$ обозначим через $\chi_G(k)$ количество правильных раскрасок графа G в k цветов. Пусть G — связный граф с блоками $B_1, \ldots, B_n$. Докажите, что

$$\chi_G(k) = \left(\frac{1}{k}\right)^{n-1} \prod_{i=1}^{n} \chi_{B_i}(k).$$

6. В графе любые два простых цикла нечётной длины не имеют общих рёбер. Докажите, что вершины этого графа можно раскрасить в два цвета так, чтобы каждая вершина была соединена ребром не более чем с одной вершиной такого же цвета.

7. В стране 100 городов, соединённых друг с другом дорогами так, что даже если любой город A закроет все дороги, выходящие из него, то и в этом случае из любого города можно будет проехать в любой другой (не считая, конечно, самого города A). Докажите, что страну можно разбить на две провинции, по 50 городов в каждой, так, что в обеих провинциях из любого города можно проехать в любой другой.

8. Докажите, что из двусвязного графа, степени всех вершин которого хотя бы три можно так выбросить вершину, чтобы граф остался двусвязным.