

## Комплексные числа – 2

**Мысль.** 1. При работе с многочленами бывает полезно подставлять вместо переменных те или иные числовые значения, в том числе комплексные.

2. Если нужно доказать, что один многочлен делится на другой, полезно доказать, что корни второго многочлена являются также корнями первого.

1. Пусть  $x^{2022} + y^{2022} = F(x+y, xy)$ . Найти сумму коэффициентов многочлена  $F$ .
2. Пусть  $a, b, c, d$  – вещественные числа, такие, что  $b - d \geq 5$  и что все корни  $x_1, x_2, x_3, x_4$  многочлена  $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$  вещественные. Найти минимум выражения  $(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)(x_3^2 + 1)(x_4^2 + 1)$ .
3. Пусть  $n > 3$  – натуральное число. Учитель написал на доске многочлены  $x^{n-3}, x^n$  и  $x + x^{n+1}$ . За один ход ученик может взять два (возможно, совпадающих) многочлена с доски и дописать на доску их сумму, разность или произведение.
  - (а) Докажите, что если  $n$  делится на 3, такими действиями невозможно получить многочлен  $x$ .
  - (б) Для каких натуральных  $n > 3$  можно за несколько действий добиться того, что на доске появится многочлен  $x^?$
4. Пусть  $n$  – нечетное натуральное число и  $\varepsilon$  – примитивный корень степени  $n$ .
  - (а) Вычислите  $(1 + \varepsilon)(1 + \varepsilon^2) \dots (1 + \varepsilon^n)$  и  $(1 - \varepsilon)(1 - \varepsilon^2) \dots (1 - \varepsilon^n)$ .
  - (б) Вычислите  $(1 - \varepsilon)(1 - \varepsilon^2) \dots (1 - \varepsilon^{\frac{n-1}{2}})$ .
5.
  - (а) При каких натуральных  $n$  многочлен  $x^{2n} + x^n + 1$  делится на многочлен  $x^2 + x + 1$ ?
  - (б) Докажите, что многочлен  $x^{60} + x^{50} + x^{40} + x^{30} + x^{20} + x^{10} + 1$  делится на многочлен  $x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ .
6. Найти все комплексные числа  $\lambda$ , при которых многочлен  $x^3 + y^3 + z^3 + \lambda xyz$  можно разложить в произведение трех многочленов первой степени.
7. Найти все многочлены  $P \in \mathbb{C}[z]$ , такие, что все комплексные корни многочленов  $P(z)$  и  $P(z) - 1$  имеют модуль 1.
8. Докажите, что если у двух многочленов совпадают множество [комплексных] точек, в которых они принимают значение 0, и множество точек, в которых они принимают значение 1, то многочлены совпадают.