

Комплексные числа – 1

Определение. *Комплексным числом* называется выражение вида $z = a + bi$, где $a, b \in \mathbb{R}$, а $i^2 = -1$.

Геометрически комплексное число z — это точка на плоскости (или, что то же самое, вектор с началом в начале координат и концом в данной точке). *Модуль* $|z|$ комплексного числа — это длина соответствующего вектора, а *аргумент* φ — направленный угол между осью абсцисс и соответствующим вектором (по умолчанию мы считаем, что $-\pi < \varphi \leq \pi$). *Тригонометрическая форма записи комплексного числа:* $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$.

Вектор, симметричный z относительно оси абсцисс, называется сопряженным с z и обозначается \bar{z} . Часто бывает полезно использовать равенство $|z|^2 = z\bar{z}$. В частности, если $|z| = 1$, то $\bar{z} = 1/z$.

Определение. Комплексное число z называется *корнем степени n из единицы*, если $z^n = 1$. *Примитивным корнем степени n* называется такой корень степени n из единицы, который не является корнем степени k из единицы для всех натуральных $k < n$. Стандартное обозначение: ε .

Мысль. При выполнении операций сложения и вычитания с комплексными числами удобно пользоваться обычной формой записи, а при выполнении операций умножения, деления и возведения в степень — тригонометрической.

- (а) Докажите, что $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$ и $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$,

(б) Докажите, что при перемножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

(в) (Формула Муавра) Докажите, что $(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$.
- (а) Вычислите $\frac{(1 + 3i)(1 - 4i) + 4 + i}{2 + i}$.

(б) Вычислите $(1 + \sqrt{3}i)^{2022}, (1 + i)^{-12}$.

(в) Вычислите $\sqrt{3 + 4i}, \sqrt[5]{1}$.
- Докажите, что число $z = \frac{2 + i}{2 - i}$ имеет модуль 1, но не является корнем степени n из единицы ни для какого натурального n .
- Вычислить
 - $\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}$;
 - $\cos \varphi + \cos 2\varphi + \dots + \cos n\varphi$;
 - $C_{3n}^0 + C_{3n}^3 + C_{3n}^6 + C_{3n}^9 + \dots + C_{3n}^{3n}$.
- Известно, что $|a| = |b| = |c| = 1$. Найти $\left| \frac{ab + bc + ca}{a + b + c} \right|$.
- Можно ли так отметить 2022 точки на единичной окружности, чтобы все попарные расстояния между ними были рациональны?

7. (а) Для заданного натурального числа n запишите тригонометрические формы всех примитивных корней степени n . Сколько существует таких корней?
- (б) Вычислите сумму всех корней степени n из единицы.
- (в) Вычислите сумму всех примитивных корней степени p из единицы, где p — простое число.
- (г) Вычислите сумму всех примитивных корней степени pq из единицы, где p и q — различные простые числа.