Разнобой по ТЧ

1. Докажите, что $1997!! + 1998!!$ делится на 1999. [1]

2. Натуральные числа a, b, c и d удовлетворяют равенству $ab = cd$. Докажите, что число $a^n + b^n + c^n + d^n$ составное.

3. На доске записано целое число. Его последняя цифра запоминается, затем стирается и, умноженная на 5, прибавляется к тому числу, что осталось на доске после стирания. Первоначально было записано число 7^{2022}. Может ли после применения нескольких таких операций получиться число 2022^7?

4. Найдите все целочисленные решения уравнения $x^3 - 3 = 2y^2$.

5. Дано натуральное $k \geqslant 2$. Найдите все $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такие, что для любых натуральных $x_1, x_2, \ldots, x_k$ число $f(x_1)! + f(x_2)! + \cdots + f(x_k)!$ делится на $x_1! + x_2! + \cdots + x_k!$.

6. Даны натуральные числа a, b, c. Докажите, что если $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$ целое, то abc является кубом.

7. Вадим строит последовательность натуральных чисел. Он выбирает $a_1 > 100$, а $a_{k+1} = a_k^2 - 1$. Может ли так оказаться, что любое простое число будет делителем какого-то члена этой последовательности?

8. Вещественные числа a, b, c таковы, что числа

$$\frac{1+ab}{a-b}, \frac{1+bc}{b-c}, \frac{1+ca}{c-a}$$

целые. Докажите, что они попарно взаимнопросты.

9. Даны целые различные числа $x_1, x_2, \cdots x_n$. Докажите, что произведение

$$\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{x_i - x_j}{i - j}$$

целое.

[1] Напомним, что $(2n))!! = (2n) \cdot (2n-2) \cdot \ldots \cdot 2$ и $(2n+1))!! = (2n+1) \cdot (2n-1) \cdot \ldots \cdot 1$.