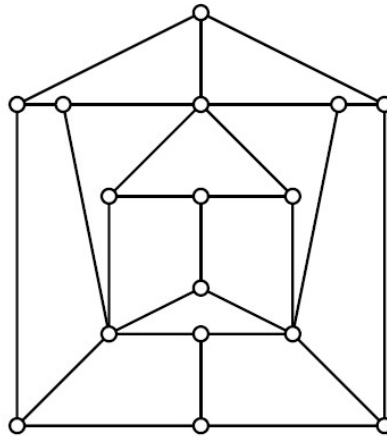


Гамильтоновы графы

Определение. *Гамильтонов путь (цикл) в графе* — путь (цикл), проходящий через каждую вершину ровно по одному разу.

Граф называется *гамильтоновым*, если в нём существует гамильтонов цикл.

1. Есть ли в данном графе гамильтонов путь?



2. На какое максимальное число непересекающихся по рёбрам гамильтоновых (а) путей (б) циклов можно разбить полный граф на n вершинах?
3. Докажите, что грани планарного гамильтонова графа можно покрасить в 4 цвета правильным образом.
4. (а) В графе на $n \geq 3$ вершинах степень каждой вершины не меньше $\frac{n}{2}$. Докажите, что в этом графе есть гамильтонов цикл. (б) В графе на $n \geq 3$ вершинах степень каждой вершины не меньше $\frac{n-1}{2}$. Докажите, что в этом графе есть гамильтонов путь.
5. (а) В графе на $n \geq 3$ вершинах сумма степеней любых двух несмежных вершин не меньше n . Докажите, что в графе есть гамильтонов цикл. (б) В графе на $n \geq 3$ вершинах сумма степеней любых двух несмежных вершин не меньше $n - 1$. Докажите, что в графе есть гамильтонов путь.
6. Дан двудольный граф, по n вершин в каждой доле. Степень каждой вершины строго больше, чем $\frac{n}{2}$. Докажите, что в графе существует гамильтонов цикл.
7. (а) Докажите, что в полном ориентированном графе есть гамильтонов путь. (б) Докажите, что для любого n можно построить полный ориентированный граф, в котором имеется не менее $\frac{n!}{2^n}$ гамильтоновых путей.
8. Рассмотрим граф *де Брёйна*: вершинами данного графа являются последовательности из нулей и единиц длины n , а ориентированные рёбра ведут из последовательности $a_0 a_1 \dots a_{n-1}$ в последовательность $a_1 a_2 \dots a_n$. Докажите, что для любого n граф де Брёйна является гамильтоновым.