Раскраски графов

1. Докажите, что вершины графа, в котором степень каждой вершины не более k можно раскрасить в $k^2 - k + 1$ цвет так, чтобы ни у какой вершины не было двух одноцветных соседей.

2. Дан граф на 1000 вершинах, степени всех вершин которого не превосходят 10. Докажите, что на его рёбрах можно расставить стрелки, чтобы каждый простой путь содержал не более 10 рёбер.

3. Докажите, что ориентированный граф, из каждой вершины которого выходит не более d рёбер, можно правильно раскрасить в $2d + 1$ цвет.

4. Вершины графа нельзя раскрасить правильным образом в d цветов. Докажите, что можно выбрать несколько вершин в этом графе, чтобы каждая из выбранных была соединена хотя бы с d из выбранных.

5. В некотором графе нет простого пути из 100 рёбер. Докажите, что его вершины можно покрасить в 100 цветов правильным образом.

6. Дан связный граф. Известно, что как ни покрась его вершины в n цветов, найдется ребро с концами одного цвета. Докажите, что можно так удалить $\frac{n(n-1)}{2}$ рёбер, чтобы граф остался связным.

7. Рёбра полного графа на 101 вершине раскрашены в 25 цветов так, что нет одноцветных треугольников. Какое наибольшее количество треугольников с рёбрами трёх разных цветов может быть?