Признаки описанности

1. **(а)** Пусть D — точка касания вписанной окружности треугольника ABC со стороной AC. Докажите, что вписанные окружности треугольников ABD и DBC касаются.

   (б) Пусть D — точка касания вневписанной окружности треугольника ABC со стороной AD. Докажите, что вневписанные окружности треугольников ABD и DBC, касающиеся отрезка AC, касаются.

2. Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ таков, что лучи AB и DC пересекаются в точке P, а лучи BC и AD пересекаются в точке Q. Докажите, что в $ABCD$ можно вписать окружность тогда и только тогда, когда **(а)** $AB + CD = BC + AD$; **(б)** $PB + BQ = PD + DQ$; **(в)** $AP + CQ = AQ + CP$.

3. Две прямые, проходящие через точки пересечения пар противоположных сторон выпуклого четырёхугольника делят его на четыре меньших четырёхугольника. Докажите, что если какие-то два из этих четырёхугольников без общей стороны описанные, то и исходный четырёхугольник описанный.

4. На сторонах AB, BC, CD и DA выпуклого четырехугольника $ABCD$ выбраны точки E, F, G, H соответственно, P — точка пересечения отрезков EG и FH. Докажите, что если четырехугольники $HAEP$, $EBFP$, $FCGP$, $GDHP$ описанные, то и четырехугольник $ABCD$ тоже описанный.

5. Окружности S_1 и S_2, S_2 и S_3, S_3 и S_4, S_4 и S_1 касаются внешним образом. Докажите, что четыре общие касательные (в точках касания окружностей) либо пересекаются в одной точке, либо касаются одной окружности.

6. Окружность с центром I касается сторон BC, AC и AB неравнобедренного треугольника ABC в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. В четырёхугольники AC_1IB_1 и CA_1IB_1 вписаны окружности ω_1 и ω_2. Докажите, что общая внутренняя касательная к ω_1 и ω_2, отличная от IB_1, проходит через точку B.

7. К двум непересекающимся окружностям ω_I и ω_J с центрами I и J проведены два отрезка общих внешних касательных. На одном отрезке отмечена точка A, на другом - точки B и C так, что AB касается ω_I и AC касается ω_J. Вневписанная окружность треугольника ABC касается отрезка BC в точке D. Докажите, что середина отрезка IJ равноудалена от точек A и D.

8. В треугольнике ABC на сторонах AB, BC и CA отмечены точки C_1, A_1 и B_1 соответственно так, что отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке D. Оказалось, что AC_1DB_1 и CA_1DB_1 описанные. Докажите, что DC_1BA_1 тоже описанный.

9. Пусть M — точка касания окружности, вписанной в треугольник ABC, со стороной AB, T — произвольная точка стороны BC, отличная от вершины. Докажите, что три окружности, вписанные в треугольники BMT, MTA, ATC, касаются одной прямой.