Мюрхед и полиномиальные неравенства

Определение. Зафиксируем переменные x_1, x_2, x_3. *Симметрические многочлены* («тэшки») $T_{\alpha,\beta,\gamma} = \sum_\sigma x_{\sigma(1)}^\alpha x_{\sigma(2)}^\beta x_{\sigma(3)}^\gamma$, где суммирование берется по всевозможным перестановкам σ трех переменных, а числа $\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma$ — целые неотрицательные. Например,

$$T_{3,0,0} = 2(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3), \quad T_{2,1,0} = x_1^2x_2 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1 + x_1x_2^2 + x_2x_3^2 + x_3x_1^2, \quad T_{1,1,1} = 6x_1x_2x_3.$$

Неравенство Мюрхеда. Говорят, что набор $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ *мажорирует* набор $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, если выполнены следующие условия:

$$\alpha_1 \geqslant \alpha_2, \quad \alpha_1 + \beta_1 \geqslant \alpha_2 + \beta_2, \quad \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2.$$

Если набор $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ мажорирует набор $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, то для неотрицательных значений переменных справедливо неравенство $T_{\alpha_1,\beta_1,\gamma_1} \geqslant T_{\alpha_2,\beta_2,\gamma_2}$.

Мысль. При выполнении арифметических операций с симметрическими многочленами достаточно проследить за судьбой одного слагаемого из каждой тэшки, потому что у остальных слагаемых судьба аналогична…

Пример 1. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство $\sum_{\text{cyc}} \dfrac{a}{b+c} \geqslant \dfrac{3}{2}$.

Решение. Положим $s = a+b+c$. Тогда домножим на знаменатель и получим следующее: $\sum_{\text{cyc}} a(s-b)(s-c) \geqslant \dfrac{3}{2}(s-a)(s-b)(s-c)$. Левая часть равна

$$s^2\sum_{\text{cyc}} a - s\sum_{\text{sym}} ab + 3abc = \Big(\sum_{\text{cyc}} a\Big)^3 - \Big(\sum_{\text{cyc}} a\Big)\Big(\sum_{\text{sym}} ab\Big) + 3abc =$$
$$= \Big(\sum_{\text{cyc}} a^3 + 3\sum_{\text{sym}} a^2b + 6abc\Big) - \Big(2\sum_{\text{sym}} a^2b + 6abc\Big) + 3abc = \frac{1}{2}T_{3,0,0} + 2T_{2,1,0} + \frac{1}{2}T_{1,1,1}.$$

Правая часть равна $(s-a)(s-b)(s-c) = s^3 - s^2\sum_{\text{cyc}} a + s\sum_{\text{cyc}} ab - abc = \left(\sum_{\text{cyc}} a\right)\left(\sum_{\text{cyc}} ab\right) - abc = \sum_{\text{sym}} a^2b + 2abc = T_{2,1,0} + \dfrac{1}{3}T_{1,1,1}$.

В итоге получаем следующее: $\dfrac{1}{2}T_{3,0,0} + 3T_{2,1,0} + \dfrac{1}{2}T_{1,1,1} \geqslant \dfrac{3}{2}T_{2,1,0} + \dfrac{1}{2}T_{1,1,1}$, откуда $T_{3,0,0} \geqslant T_{2,1,0}$ — неравенство Мюрхеда.

1. Для неотрицательных чисел x, y, z докажите неравенство $(x+y)(y+z)(z+x)+xyz \leqslant 3(x^3+y^3+z^3)$.

2. Для неотрицательных чисел x, y, z, удовлетворяющих условию $x+y+z=1$, докажите неравенство $1+9xyz \geqslant 4(xy+yz+zx)$.

3. Для неотрицательных чисел x, y, z, удовлетворяющих условию $x^2+y^2+z^2=3$, докажите неравенство $x+y+z \geqslant xy+yz+zx$.

4. Для положительных чисел a, b, c, d докажите неравенство
$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}} \geqslant \sqrt[3]{\frac{abc+bcd+cda+dab}{4}}.$$

5. Для неотрицательных чисел a, b, c имеет место равенство $a+b+c=ab+bc+ca$. Докажите, что $a+b+c+1 \geqslant 4abc$.

6. **Неравенство Шура** **(а)** Докажите, что $T_{3,0,0}+T_{1,1,1} \geqslant 2T_{2,1,0}$.
(б) Докажите, что для любого $n \geqslant 3$ $T_{n,0,0}+T_{n-2,1,1} \geqslant 2T_{n-1,1,0}$.

7. Для неотрицательных чисел x, y, z, удовлетворяющих условию $x+y+z=1$, докажите неравенство $0 \leqslant xy+yz+zx-2xyz \leqslant 7/27$.

8. Дано натуральное число k. Докажите, что для любых положительных чисел x, y, z, сумма которых равна 1, выполнено неравенство
$$\frac{x^{k+2}}{x^{k+1}+y^k+z^k}+\frac{y^{k+2}}{y^{k+1}+z^k+x^k}+\frac{z^{k+2}}{z^{k+1}+x^k+y^k} \geqslant \frac{1}{7}.$$