Тренировочная олимпиада

Задача 1. Дано нечётное натуральное число $n > 1$. На доске записаны числа

$$n, n+1, n+2, \ldots, 2n-1.$$

Докажите, что можно стереть одно из них так, чтобы сумма оставшихся чисел не делилась ни на одно из оставшихся чисел.

Задача 2. Дано натуральное $n > 1$. Найдите наибольшее вещественное α, такое что для всех положительных чисел $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$, удовлетворяющих условию $a_1 + \ldots + a_n = b_1 + \ldots + b_n = 1$, выполнено неравенство

$$\frac{a_1^2}{a_1^3 + b_1^5} + \ldots + \frac{a_n^2}{a_n^3 + b_n^5} > \alpha.$$

Задача 3. Дано натуральное число n. Двое играют в такую игру. Изначально на столе лежит $2n+1$ рублёвых монет, а на доске написано число $a = 1$. Игроки ходят по очереди. Каждым ходом игрок либо не меняет, либо увеличивает на 2 число a, после чего забирает a монет со стола. Игра заканчивается, когда на столе остаётся меньше, чем a монет; выигрывает тот, у кого в этот момент монет больше, а если монет у игроков поровну, игра заканчивается вничью. Каким будет результат игры при правильной игре обоих игроков?

Задача 4. В треугольнике ABC отметили центр вписанной окружности I и провели описанную окружность ω. Вписанная окружность треугольника ABC касается BC в точке D. Перпендикуляр, восставленный в точке I к прямой AI, перескает прямые AB и AC в точках E и F соответственно. Описанная окружность треугольника AEF пересекает ω и прямую AI в точках G и H. Касательная в точке G к ω пересекает BC в точке J. Прямая AJ пересекается с ω в точке K. Докажите, что описанные окружности треугольников DJK и GIH касаются.