uvw-метод решения неравенств

Рассмотрим кубический многочлен $f(x) = x^3 - ux^2 + vx - w$ с корнями (вообще говоря, комплексными) a, b и c. Мы хотим найти условия на u, v, w, при которых корни этого многочлена будут вещественными и неотрицательными. Для этого рассмотрим *дискриминант*

$$D \coloneqq (a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 = -4u^3w + u^2v^2 + 18uvw - 4v^3 - 27w^2$$

(последнее равенство следует из теоремы Виета $a+b+c = u$, $ab+bc+ca = v$, $abc = w$, и некоторых вычислений). Заметим, что у кубического многочлена либо все три корня вещественны, и тогда $D \geqslant 0$, или один корень вещественный, а два других — комплексно-сопряженные, и тогда $D < 0$. Поэтому кубический многочлен $f(x)$ имеет три *вещественных* корня тогда и только тогда, когда $D \geqslant 0$.

С другой стороны, ясно, что если u, v, $w \geqslant 0$, то у многочлена f не может быть отрицательных корней. Поэтому справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть даны три числа (u, v, w). Тогда числа a, b, c, определяемые как корни кубического уравнения $f(x) = 0$, будут вещественными и неотрицательными тогда и только тогда, когда u, v, $w \geqslant 0$ и $D = -4u^3w + u^2v^2 + 18uvw - 4v^3 - 27w^2 \geqslant 0$.

Замечание. Если записать условие $D \geqslant 0$ в терминах переменных a, b, c, то мы получим следующее неравенство:

$$|T_{3,0,0} + 2T_{1,1,1} - 3T_{2,1,0}| \leqslant 2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)^{3/2}.$$

Это неравенство (и аналогичные ему) можно доказать с помощью полной производной, что устанавливает связь между uvw-методом и методом полной производной.

Зафиксируем значения u и v и посмотрим, какие значения может принимать w. Условие $D \geqslant 0$ является квадратным неравенством относительно w с отрицательным старшим коэффициентом. Поэтому множество решений представляет собой отрезок. Таким образом, $w_{\min} \leqslant w \leqslant w_{\max}$, причем в граничных точках $D = 0$, а значит, два корня (например, a и b) склеиваются: $a = b$. Если $w_{\min} \leqslant 0$, то минимальное значение w равно 0 и один из корней (например, a) равен 0.

Аналогичным образом можно проанализировать множества решений неравенства D относительно переменных u и v (правда, здесь нужно рассматривать кубические уравнения). Соберем информацию об условиях достижения ими минимального или максимального значения в одну таблицу.

	w	v	u (при условии $w > 0$)
min	$c = 0$ или $a = b$	$a = b$	$a = b$
max	$a = b$	$a = b$	$a = b$

Пример. Известно, что $a, b, c \geqslant 0$ и $a+b+c = 1$. Докажите, что $1 + 9abc \geqslant 4(ab+bc+ca)$.

Решение. Перепишем неравенство в переменных u, v, w: $1 + 9w \geqslant 4v$. Зафиксируем числа u и w и будем двигать v. Заметим, что максимум правой части достигается при $v = v_{\max}$. Если $a = b$, то неравенство принимает вид $(3a-1)^2(2a-1) \leqslant 0$, что верно, т.к. $a \leqslant 1/2$.

Полезные советы. 1. Фиксируйте те величины, на которые наложено стартовое условие.

2. Проверяйте каждый шаг вычислений подстановкой равных значений переменных.

Несколько полезных формул

- $a^2+b^2+c^2 = u^2 - 2v$,
- $a^3+b^3+c^3 = u^3 - 3uv + 3w$,
- $a^4+b^4+c^4 = u^4 - 4u^2v + 2v^2 + 4uw$,
- $a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2 = uv - 3w$,
- $(a+b)(b+c)(c+a) = uv - w$,
- $(ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2 = v^2 - 2uw$.

1. Известно, что $a, b, c > 0$ и $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = 1$. Докажите, что $(a-1)(b-1)(c-1) \geqslant 8$.

2. Известно, что $a, b, c \geqslant 0$. Докажите. что $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} + \dfrac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geqslant 2$.

3. Известно, что $a, b, c \geqslant 0$ и $a+b+c = 3$. Докажите, что $\dfrac{1}{9-ab} + \dfrac{1}{9-bc} + \dfrac{1}{9-ca} \leqslant \dfrac{3}{8}$.

4. Известно, что $a, b, c \geqslant 0$ и $a+b+c = 3$. Докажите, что $\dfrac{1}{1+2ab} + \dfrac{1}{1+2bc} + \dfrac{1}{1+2ca} \geqslant \dfrac{2}{1+abc}$.

5. Неотрицательные числа a, b и c таковы, что никакие два из них не равны 0 одновременно. Докажите неравенство $(ab+bc+ca)\Big(\dfrac{1}{(a+b)^2} + \dfrac{1}{(b+c)^2} + \dfrac{1}{(c+a)^2}\Big) \geqslant \dfrac{9}{4}$.

6. Пусть P — симметрический многочлен от трех переменных не более чем пятой степени. Докажите, что неравенство $P(a,b,c) \geqslant 0$ справедливо при любых a, b, $c \geqslant 0$ тогда и только тогда, когда справедливы неравенства $P(a,b,0) \geqslant 0$ и $P(a,a,c) \geqslant 0$ для любых a, b, $c \geqslant 0$.