Метод секущих Диофанта и бесконечный спуск

1. Решите в целых числах уравнение **(а)** $x^2+y^2=2z^2$, **(б)** $x^2+3xy+y^2=z^2$, **(в)** $3x^2+5y^2=7z^2$.

2. Докажите, что уравнение **(а)** $x^4+y^4=z^2$, **(б)** $x^2+y^4=z^4$ не имеет решений в натуральных числах. (Как следствие, Великая теорема Ферма справедлива для $n=4\ldots$)

3. Докажите, что не существует прямоугольного треугольника, стороны которого являются натуральными числами, а площадь является точным квадратом.

4. Докажите, что не существует четырех квадратов натуральных чисел, образующих арифметическую прогрессию.

5. **Теорема Лежандра.**

Уравнение $ax^2+by^2=cz^2$ имеет ненулевое решение в целых числах тогда и только тогда, когда $(-ab)$ — вычет по модулю c, bc — вычет по модулю a и ca — вычет по модулю b.

(а) Докажите необходимость условий теоремы Лежандра.

(б) Покажите, что при доказательстве достаточности в теореме Лежандра можно считать, что числа a, b и c попарно взаимно просты.

(в) Рассмотрим многочлен $f(x,y,z)=ax^2+by^2-cz^2$ от трех переменных. В условиях теоремы Лежандра докажите, что он приводим над кольцом $\mathbb{Z}_{abc}$.

(г) Докажите, что если x, y, z целые, то $ax^2+by^2-cz^2-abc=aX^2+bY^2-cZ^2$ для некоторых целых чисел X, Y, Z.

(д) Докажите теорему Лежандра.