Многочлены

1. Найдите все такие многочлены $P \in \mathbb{R}[x]$, для которых

$$xP(x-1) = (x-2)P(x).$$

2. Даны многочлены с положительными старшими коэффициентами P и Q. Оказалось, что $P(x)$ целое тогда и только тогда, когда $Q(x)$ целое. Докажите, что P и Q отличаются на константу.

3. Для любых попарно различных целых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ докажите, что многочлен **(а)** $(x-a_1)\cdots(x-a_n)-1$ **(б)** $(x-a_1)^2\cdots(x-a_n)^2+1$ неприводим над $\mathbb{Z}$.

4. Даны два многочлена P и Q с рациональными коэффициентами. Оказалось, что в бесконечном количестве целых точек числа $P(n)$ и $Q(n)$ целые и $P(n)$ делится на $Q(n)$. Докажите, что $P(x)$ делится на $Q(x)$.

5. Пусть p — простое число и f — многочлен степени d с целыми коэффициентами. Известно, что $f(0)=0, f(1)=1$ и при любом целом n число $f(n)$ сравнимо с 0 или 1 по модулю p. Докажите, что $d \geqslant p-1$.

6. Многочлен $P(x)$ степени n с вещественными коэффициентами таков, что для любых целых $0 \leqslant a < b \leqslant n$ число $\frac{P(a)-P(b)}{a-b}$ — целое. Докажите, что это выражение целое для всех различных a, b.

7. Пусть $P(x)$ — многочлен степени $n > 1$ с целыми коэффициентами. Докажите, что при любом натуральном k уравнение

$$\underbrace{P(P(\ldots P}_{k\text{ раз}}(x)\ldots)) = x$$

имеет не более n различных целых корней.