Графы

1. В стране некоторые пары городов соединены дорогами, которые не пересекаются вне городов. В каждом городе установлена табличка, на которой указана минимальная длина маршрута, выходящего из этого города и проходящего по всем остальным городам страны (маршрут может проходить по некоторым городам больше одного раза и не обязан возвращаться в исходный город). Докажите, что любые два числа на табличках отличаются не более, чем в полтора раза.

2. В королевстве между некоторыми городами открыты дороги с двусторонним движением так, что из любого города можно проехать по дорогам в любой другой. Проезд по дорогам платный, причём стоимость у всех дорог разная. Министр составил список всех возможных маршрутов по дорогам королевства, проходящих через каждый город ровно один раз. Король-реформатор отметил в каждом из этих маршрутов самую дорогую дорогу и приказал закрыть все дороги, которые были отмечены хотя бы один раз. После этого оказалось, что из города A нельзя проехать в город B, из города B — в город C, а из города C — в город A. Докажите, что приказ короля был выполнен неправильно.

3. В королевстве N городов, некоторые пары которых соединены непересекающимися дорогами с двусторонним движением (города из такой пары называются соседними). При этом известно, что из любого города можно доехать до любого другого, но невозможно, выехав из некоторого города и двигаясь по различным дорогам, вернуться в исходный город. Однажды Король провел такую реформу: каждый из N мэров городов стал снова мэром одного из N городов, но, возможно, не того города, в котором он работал до реформы. Оказалось, что любые два мэра, работавшие в соседних городах до реформы, оказались в соседних городах и после реформы. Докажите, что либо найдется город, в котором мэр после реформы не поменялся, либо найдется пара соседних городов, обменявшихся мэрами.

4. На острове рыцарей и лжецов есть 1001 поселок, соединенные 1000 дорогами так, что от каждого города можно добраться до каждого. В каждом поселке жители только одного из типов. Жители каждого поселка сделали 2 утверждения:

1. Наш поселок соединен хотя бы с 3 другими поселками.
2. Наш поселок соединен хотя бы с 2 поселками лжецов.

Какое наименьшее количество поселков с лжецами может быть на острове?

5. В некотором графе степень каждой вершины не превосходит 1000. Докажите, что рёбра графа можно так покрасить в 10 цветов, что не найдется нечётного одноцветного цикла.

6. Назовём компанию k-неразбиваемой, если при любом разбиении её на k групп в одной из групп найдутся два знакомых человека. Дана 3-неразбиваемая компания, в которой нет четырёх попарно знакомых человек. Докажите, что её можно разделить на две компании, одна из которых 2-неразбиваемая, а другая — 1-неразбиваемая.

7. В стране есть $n > 1$ городов, некоторые пары городов соединены двусторонними беспосадочными авиарейсами. При этом между любыми двумя городами существует единственный авиамаршрут (возможно, с пересадками). Мэр каждого города X подсчитал количество таких нумераций всех городов числами от 1 до n, что на любом авиамаршруте, начинающемся в X, номера городов идут в порядке возрастания. Все мэры, кроме одного, заметили, что их результаты подсчётов делятся на 2023. Докажите, что и у оставшегося мэра результат также делится на 2023.