Разнобой

1. Барон Мюнхгаузен придумал теорему: если многочлен $x^n - ax^{n-1} + bx^{n-2} + \ldots$ имеет n натуральных корней, то на плоскости найдутся a прямых, у которых ровно b точек пересечения друг с другом. Не ошибается ли барон?

2. Найдите все последовательности натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots$, такие что для любого n выполняется $a_n \leqslant n\sqrt{n}$ и для любых m, k выполняется $a_{m+k} - a_m \,\vdots\, k$.

3. На улице дома стоят друг напротив друга, всего 50 пар. На правой стороне улицы расположены дома с чётными натуральными номерами, на левой — с нечётными натуральными номерами, номера возрастают от начала улицы к концу на каждой стороне, но идут не обязательно подряд (возможны пропуски). Для каждого дома на правой стороне улицы нашли разность между его номером и номером дома напротив, и оказалось, что все найденные числа различны. Наибольший номер дома на улице равен n. Найдите наименьшее возможное значение n.

4. Докажите, что при всех $a_1 > a_2 > \ldots > a_n > 0$ выполняется неравенство

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \leqslant \left(\frac{a_1}{\sqrt{1}+\sqrt{0}} + \frac{a_2}{\sqrt{2}+\sqrt{1}} + \ldots + \frac{a_n}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}\right)^2.$$

5. Изначально на белой клетчатой плоскости конечное число клеток окрашено в чёрный цвет. На плоскости лежит бумажный клетчатый многоугольник M, в котором больше одной клетки. Его можно сдвигать, не поворачивая, в любом направлении на любое расстояние, но так, чтобы после сдвига он лежал «по клеткам». Если после очередного сдвига ровно одна клетка у M лежит на белой клетке плоскости, эту белую клетку окрашивают в чёрный цвет и делают следующий сдвиг. Докажите, что существует такая белая клетка, которая никогда не будет окрашена в чёрный цвет, сколько бы раз мы ни сдвигали M по описанным правилам.

6. Натуральные числа $a, b, c > 1$ взаимно просты в совокупности. Найдите все возможные значения НОД$(a^2b + b^2c + c^2a, ab^2 + bc^2 + ca^2, a + b + c)$.

7. Куб, состоящий из $(2n)^3$ единичных кубиков, проткнут несколькими спицами, параллельными рёбрам куба. Каждая спица протыкает ровно $2n$ кубиков, каждый кубик проткнут хотя бы одной спицей. Какое наибольшее количество спиц можно гарантированно выбрать из имеющихся так, чтобы никакие две выбранные спицы не протыкали один и тот же кубик?