Последовательности

1. Последовательность $\{a_n\}$ такова, что $a_1 = 1$ и $a_{n+1} = 2a_n + \sqrt{3a_n^2 + 1}$. Докажите, что эта последовательность целочисленная.

2. Докажите, что существует бесконечно много пар (a, b) взаимно простых натуральных чисел, таких, что числа $\dfrac{a^2-5}{b}$ и $\dfrac{b^2-5}{a}$ натуральны.

3. Последовательность $\{x_n\}$ удовлетворяет следующим условиям: $x_0 = 1$, $x_1 = 1$ и $x_{n+2} = 14x_{n+1} - x_n - 4$. Докажите, что x_n — точный квадрат при всех натуральных n.

4. Последовательность $\{a_n\}$ удовлетворяет следующим условиям: $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ и $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$. Докажите, что $\|a_n\|_2 = \|n\|_2$ для всех $n \geqslant 1$.

5. Дана последовательность $\{x_n\}$, такая что $x_{n+2} = |x_{n+1}| - x_n$. Докажите, что она периодична.

[Центр педагогического мастерства] П. В. Бибиков
[*2022–2023 уч. г.*] группа: 10 *16 марта 2023 г.*

Последовательности

1. Последовательность $\{a_n\}$ такова, что $a_1 = 1$ и $a_{n+1} = 2a_n + \sqrt{3a_n^2 + 1}$. Докажите, что эта последовательность целочисленная.

2. Докажите, что существует бесконечно много пар (a, b) взаимно простых натуральных чисел, таких, что числа $\dfrac{a^2-5}{b}$ и $\dfrac{b^2-5}{a}$ натуральны.

3. Последовательность $\{x_n\}$ удовлетворяет следующим условиям: $x_0 = 1$, $x_1 = 1$ и $x_{n+2} = 14x_{n+1} - x_n - 4$. Докажите, что x_n — точный квадрат при всех натуральных n.

4. Последовательность $\{a_n\}$ удовлетворяет следующим условиям: $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ и $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$. Докажите, что $\|a_n\|_2 = \|n\|_2$ для всех $n \geqslant 1$.

5. Дана последовательность $\{x_n\}$, такая что $x_{n+2} = |x_{n+1}| - x_n$. Докажите, что она периодична.