Многочлены в комбинаторике

Пусть есть некоторая конечная последовательность целых неотрицательных чисел $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Тогда есть два способа сопоставить последовательности многочлен:

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

и

$$G(x) = x^{a_0} + x^{a_1} + \ldots + x^{a_n}.$$

1. Обозначим через $\theta(n)$ количество целых $0 \leqslant k \leqslant n$, для которых C_n^k — нечётно. Докажите, что **(а)** $\theta(n)$ всегда является степенью двойки; **(б)** $\theta(n) = 2^{w_2(n)}$, где $w_2(n)$ — количество единиц в двоичной записи числа n.

2. Найдите количество подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, 2000\}$, сумма элементов которых делится на **(а)** 4; **(б)** 3.

3. Погода в мае месяце бывает двух типов: хорошая и не очень. Учёные установили две закономерности: 1) 1 мая погода всегда не очень; 2) для $2 \leqslant k \leqslant 31$ погода k-го мая следующего года не очень тогда и только когда, когда в текущем году погода k и $k-1$ мая отличалась. В каком году впервые погода в течение всего мая будет в точности такой же, как в 2007?

4. Вершины правильного n-угольника покрашены несколькими красками (каждая одной краской) так, что точки одного и того же цвета служат вершинами правильного многоугольника. Докажите, что среди этих многоугольников найдутся два равных.

5. На бесконечной клетчатой плоскости выбрали строку и заполнили её нулями, лишь в одну клетку поставив единицу. Строки ниже выбранной последовательно заполняются числами по следующему правилу: каждое число в новой строке — это сумма трёх чисел, стоящих в трёх соседних (по стороне или диагонали) клетках старой строки. Докажите, что в столбце, содержащем единичку исходной строки, нет чисел, дающих остаток 2 при делении на 3.

6. Дано простое число p и два набора натуральных чисел $A = (a_1, a_2, \ldots, a_p)$, $B = (b_1, b_2, \ldots, b_p)$. Известно, что среди чисел вида $a_i + b_j$ $(1 \leqslant i, j \leqslant p)$ ровно p чисел дают остаток 0 при делении на p, ровно p дают остаток 1, ..., ровно p дают остаток $p-1$. Докажите, что в одном из наборов каждый остаток при делении на p встречается ровно по одному разу.

7. Дана последовательность целых чисел $a_0, a_1, \ldots, a_{50}$. Оказалось, что для любого простого $p < 19$ равны суммы вида $a_k + a_{k+p} + a_{k+2p} + \ldots$ для всех $0 \leqslant k < p$. Докажите, что все a_i равны нулю.