Линейность, декомпозиция и интерполяция

Во многих задачах полезно использовать соображения *декомпозиции и линейности*. Иначе говоря, решить задачу для достаточно простых стартовых данных, а затем собрать из них решение в общем случае.

Пример: КТО. *Для любых попарно взаимно простых натуральных чисел* m_1, …, m_n *и любых целых чисел* r_1, …, r_n *существует такое целое число* x, *что* $x \equiv_{m_i} r_i$ *для любого* $i = 1, \ldots, n$.

Доказательство. Докажем, что для каждого $i = 1, \ldots, n$ существует такое целое число x_i, что $x_i \equiv_{m_j} \delta_{ij}$ (здесь $\delta_{ij} = 1$, если $i = j$ и 0, если $i \neq j$). Возьмем для удобства $i = 1$ и рассмотрим числа $m_2 \ldots m_n$, $2m_2 \ldots m_n$, …, $(m_1 - 1)m_2 \ldots m_n$. Все эти числа дают попарно различные остатки при делении на m_1, поэтому среди них есть число x_1, которое дает остаток 1. Очевидно, что оно делится на m_2, …, m_n.

Теперь возьмем число $x = r_1x_1 + r_2x_2 + \ldots + r_nx_n$. Оно будет искомым.

Хороший пример идей декомпозиции и линейности — *задачи интерполяции*. Пусть даны два набора чисел: x_0, x_1,…, x_n и y_0, y_1, …, y_n, причём в первом наборе все числа различны. Требуется найти многочлен F степени не выше n такой, что $F(x_i) = y_i$ при $i = 0, 1, \ldots, n$.

1. **(Интерполяционный многочлен Лагранжа)** Реализуйте идею декомпозиции и линейности, построив многочлены F_i, такие, что $F_i(x_j) = \delta_{ij}$, и затем многочлен F.

2. **(Интерполяционный многочлен Ньютона)** Реализуйте идею декомпозиции, построив последовательность многочленов f_i, где $i = 0, 1, \ldots, n$ таких, что $f_i(x_j) = y_j$ для всех $j \leqslant i$.

3. **(Целозначные многочлены)** Многочлен $p(x)$ (с действительными коэффициентами) называется *целозначным*, если он принимает целые значения при всех целых x. Докажите, что многочлен является целозначным тогда и только тогда, когда он представим в виде $a_0 + a_1C_x^1 + a_2C_x^2 + \ldots + a_nC_x^n$, где числа a_0, a_1, …, a_n — целые и $C_x^k = \dfrac{x(x-1)\ldots(x-k+1)}{k!}$.

4. Какую наименьшую степень может иметь приведенный многочлен $f(x)$, такой что $f(a)$ делится на 100 при любом целом a?

5. Многочлен степени n таков, что для любого $i = 0, 1, \ldots, n$ выполнено равенство $f(i) = 2^i$. Чему равно $f(n+1)$? (Ответ нужно дать в законченном виде, без знака «…».)

6. **(а)** Для любых различных a, b, c, d, e докажите, что

$$\frac{(a-b)(a-c)(a-d)}{(e-b)(e-c)(e-d)}+\frac{(a-b)(a-c)(a-e)}{(d-b)(d-c)(d-e)}+$$
$$+\frac{(a-b)(a-d)(a-e)}{(c-b)(c-d)(c-e)}+\frac{(a-c)(a-d)(a-e)}{(b-c)(b-d)(b-e)}=1.$$

(б) Для любых различных a, b, c, d докажите, что

$$\frac{a(b+c+d)}{(a-b)(a-c)(a-d)}+\frac{b(c+d+a)}{(b-c)(b-d)(b-a)}+$$
$$+\frac{c(d+a+b)}{(c-d)(c-a)(c-b)}+\frac{d(a+b+c)}{(d-a)(d-b)(d-c)}=0.$$

7. **(а)** Дан приведенный многочлен $P(x)$ степени $n-1$. Для различных x_1, x_2, $\ldots x_n$ докажите, что

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{P(x_i)}{(x_i-x_1)(x_i-x_2)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}=1.$$

(б) Дан многочлен $P(x)$ степени не более $n-2$. Для различных x_1, x_2, $\ldots x_n$ докажите, что

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{P(x_i)}{(x_i-x_1)(x_i-x_2)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}=0.$$

8. Дана последовательность Фибоначчи $F_0=0$, $F_1=1$, $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$. Многочлен $P(x)$ степени 1011 таков, что $P(k)=F_k$ при $k\in\{1011,\ldots,2022\}$. Докажите, что $P(2023)=F_{2023}-1$.

9. Петя и Вася придумали десять многочленов пятой степени. Затем Вася по очереди называл последовательные натуральные числа (начиная с некоторого), а Петя каждое названное число подставлял в один из многочленов по своему выбору и записывал полученные значения на доску слева направо. Оказалось, что числа, записанные на доске, образуют арифметическую прогрессию (именно в этом порядке). Какое максимальное количество чисел Вася мог назвать?

10. Функция $f(x)$ при целых x принимает целые значения. Оказалось, что для любого простого p существует такой многочлен $Q_p(x)$ с целыми коэффициентами степени не выше 2022, что $f(n)-Q_p(n)$ делится на p при любом целом n. Докажите, что существует такой многочлен $g(x)$ с рациональными коэффициентами, что $f(n)=g(n)$ при любом натуральном n.

11. Докажите, что любой приведенный многочлен степени n представляется в виде полусуммы двух приведенных многочленов степени n, имеющих ровно n корней каждый.