Степени вхождения и примарные компоненты

Совет Вы уже хорошо умеете использовать информацию о степенях вхождения простых чисел в те или иные выражения. В некоторых случаях оказывается полезным смотреть не просто на степень k простого числа p, а на само выражение p^k. Такое выражение называется *примарной компонентой*, и в некоторых ситуациях полезнее исследовать не степени вхождения простых в примарные компоненты, а сами примарные компоненты.

1. Пусть b, $n > 1$ — натуральные числа. Предположим, что для каждого натурального $k > 1$ существует такое целое число a_k, что $k \mid b - a_k^n$. Докажите, что b — точная n-я степень натурального числа.

2. Пусть $\{a_n\}$ — монотонно возрастающая последовательность натуральных чисел. Докажите, что множество простых делителей чисел вида $a_i + a_j$ (где $i \neq j$) бесконечно.

3. Рассмотрим многочлен $P(x) = (x + d_1)(x + d_2) \cdot \ldots \cdot (x + d_9)$, где $d_1, \ldots, d_9$ — различные целые числа. Докажите, что для всех достаточно больших натуральных n число $P(n)$ имеет простой делитель, больший 20.

4. Пусть $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — произвольная функция, отличная от константы, такая, что для всех натуральных $a \neq b$ имеем $a - b \mid f(a) - f(b)$. Докажите, что множество простых делителей чисел вида $f(c)$, где $c \in \mathbb{N}$, бесконечно.

5. Найдите все последовательности $(x_1, x_2, \ldots, x_{2020})$ натуральных чисел, таких, что для каждого натурального n найдется такое натуральное a, что

$$x_1^n + 2x_2^n + \ldots + 2020x_{2020}^n = a^{n+1} + 1.$$