К ММО

1. Дано некоторое натуральное $n > 100$. Назовём нечётное число *интересным*, если его остатки при делении на n и $2n+1$ также нечётны. Найдите наибольшую возможную разность между соседними интересными числами.

2. Верно ли, что для каждого n найдётся непостоянная арифметическая прогрессия длины n, каждый член которой не делится ни на один простой делитель, больший 10^{2023}?

3. Назовём *хорошим* 2023-значный код, состоящий из различных целых чисел от 1 до 2023. Паролем сейфа является хороший код. Известно, что сейф откроется, если введен хороший код и на каком-нибудь месте число кода совпала с соответствующим числом пароля. За какое наименьшее количество попыток можно гарантированно открыть сейф?

4. Султан собрал 300 мудрецов и предложил им испытание. Он сообщил им список из 25 цветов и сказал, что на испытании каждому мудрецу наденут на голову колпак одного из этих цветов, причём если для каждого цвета написать количество надетых колпаков этого цвета, все числа будут различны. Каждый мудрец увидит, какой колпак на ком надет, но свой колпак не увидит. Затем одновременно (по сигналу) каждый должен будет назвать предполагаемый цвет своего колпака. Могут ли мудрецы заранее договориться действовать так, чтобы гарантированно хотя бы 150 из них назвали цвет верно?

5. Верно ли, что для любого положительного вещественного числа λ существует натуральное число $n \geqslant 2$ и n натуральных чисел a_1, a_2, $\ldots$, a_n таких, что $a_1 < a_2 < \ldots < a_n < 2^n\lambda$ и для любого $k = 1, 2, \ldots, n$

$$\text{НОД}(a_1, a_k) + \text{НОД}(a_2, a_k) + \ldots + \text{НОД}(a_n, a_k) \ \vdots \ a_k\,?$$

6. На каждой клетке доски 5×5 лежит по одной монете, все монеты внешне одинаковы. Среди них ровно 2 монеты фальшивые, они одинакового веса и легче настоящих, которые тоже весят одинаково. Фальшивые монеты лежат в клетках, имеющих ровно одну общую вершину. Можно ли за одно взвешивание на чашечных весах без гирь гарантированно найти

(а) 13 настоящих монет;

(б) 15 настоящих монет;

(в) 17 настоящих монет?