О степенях двойки

1. Докажите, что при любом натуральном n число $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ не является целым.

2. По кругу стоят 10^{2023} натуральных чисел. Между каждыми двумя соседними числами записали их наименьшее общее кратное. Могут ли эти наименьшие общие кратные образовать 10^{2023} последовательных чисел (расположенных в каком-то порядке)?

3. Натуральные числа a_0, a_1, …, a_{3030} удовлетворяют следующему соотношению: $2a_{n+2} = a_{n+1} + 4a_n$ для любого $n = 0, 1, \ldots, 3028$. Докажите, что среди этих натуральных чисел найдется число, кратное 2^{2020}.

4. Пусть $n \geqslant 2$ — натуральное число. Назовем набор $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ натуральных чисел дорогим, если существует такое натуральное k, что

$$(a_1 + a_2)(a_2 + a_3) \ldots (a_{n-1} + a_n)(a_n + a_1) = 2^{2k-1}.$$

(а) Найдите все натуральные $n \geqslant 2$, для которых существует дорогой набор из n чисел.
(б) Докажите, что для любого нечетного натурального m найдется такое натуральное $n \geqslant 2$, что число m содержится в дорогом наборе из n чисел.

5. На перемене n школьников сели вокруг учителя, чтобы поиграть в игру. Учитель идет по часовой стрелке и раздает некоторым ученикам конфеты по следующему правилу. Он выбирает одного школьника, дает ему конфету, потом пропускает следующего по часовой стрелке и дает конфету сидящему через один, затем, сидящему через два, и т.д. При каких n каждый школьник в конце концов получит хотя бы одну конфету?

6. Множество M целых чисел таково, что среди любых трех элементов этого множества найдутся два, чья сумма есть степень двойки с неотрицательным целым показателем. Найдите наибольшее возможное количество элементов множества M.

7. Найдите все такие составные числа n, что для любого разложения на два натуральных сомножителя $n = xy$ сумма $x + y$ является степенью двойки.