Теорема Шпернера

Теорема. В n-элементном множестве выбрано несколько подмножеств так, что ни одно из них не содержится ни в каком другом. Тогда этих подмножеств не более $C_n^{\lfloor n/2 \rfloor}$.

1. **(а)** Рассмотрим всевозможные цепочки подмножеств

$$\varnothing = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_{n-1} \subset M_n = \{1, 2, \ldots, n\}.$$

В скольких из них содержится фиксированное s-элементное множество?

(б) Даны подмножества n-элементного множества $A_1, A_2, \ldots, A_k$, ни одно из которых не содержится в другом. Докажите неравенство *Любеля-Мешалкина-Ямамото* $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{C_n^{|A_i|}} \leqslant 1$ и выведите из него теорему Шпернера.

2. В n-элементном множестве выбрано несколько подмножеств так, что ни одно из них не содержится ни в каком другом. С помощью леммы Холла докажите, что все их можно заменить на $\lfloor n/2 \rfloor$-элементные, и выведите отсюда теорему Шпернера.

3. У n-элементного множества выбраны некоторые подмножества так, что среди них нет вложенной цепочки из k подмножеств. Какое наибольшее количество подмножеств могло быть выбрано?

4. На математической олимпиаде было 10 задач. Оказалось, что любые два участника решили разные наборы задач, причём обязательно нашлась задача, решённая первым из них и не решённая вторым. Какое наибольшее количество верных решений могло прочитать жюри олимпиады?

5. Детектив расследует преступление. В деле замешаны 80 человек, среди которых один — преступник, а один — свидетель. Каждый день детектив может пригласить к себе одного или нескольких из этих 80 человек, и если среди приглашённых есть свидетель, но нет преступника, то свидетель сообщит, кто преступник. Найдите наименьшее количество дней, за которое детектив заведомо сможет раскрыть дело.

6. В школе преподаётся n предметов. У каждого школьника по каждому предмету оценка либо 5, либо 2, причём у разных школьников разные наборы из n оценок. Известно, что нет школьника, который учится лучше, чем два других ученика, а также нет школьника, который учится хуже, чем два других ученика. (Мы считаем, что один ученик учится *лучше* другого, если по каждому предмету у него оценка не хуже, при этом по какому-нибудь предмету оценка лучше). Докажите, что в школе не более $2C_{n-1}^{\lfloor n/2 \rfloor}$ учеников.