Сложные(?) задачи

1. На научный конгресс приехали $2n$ участников, каждый из которых имеет среди других участников ровно $n1$ знакомых. При каких n всех участников можно гарантированно разбить на пары так, чтобы в каждый паре были знакомые между собой люди?

2. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$, в котором $\angle B = \angle D = 90°$. Точка M на отрезке AB такова, что $AD = AM$. Лучи DM и CB пересекаются в точке N. Точки H и K – основания перпендикуляров из D и C на AC и AN, соответственно. Докажите, что $\angle MHN = \angle MCK$.

3. Каждая из n арифметических прогрессий состоит из k натуральных чисел. Каждые две из этих прогрессий имеют не менее двух общих членов. Докажите, что если b из них $(0 < b < n)$ имеют разность d_1, а остальные — разность d_2, то $b \leqslant 2(k - d_2/\operatorname{НОД}(d_1, d_2)) - 1$.

4. Можно ли раскрасить каждое натуральное число в один из трех цветов так, чтобы не нашлось трех различных одноцветных натуральных чисел x, y и z, для которых $x + y = z^2$?

5. Найдите все натуральные k такие, что число $p = 5k + 1$ — простое, и остатки чисел $1^5, 2^5, \ldots, k^5$ при делении на p различны.

6. В треугольнике ABC отметили точку D на стороне $\overline{AB}$. На биссектрисе угла ACB отметили точку I. Описанная окружность треугольника (ACD) повторно пересекает прямые AI и CI в точках P и Q соответственно. Описанная окружность треугольника (BCD) повторно пересекает прямые BI и CI в точках R и S соответственно. Докажите, что если $P \neq Q$ и $R \neq S$, то AB, PQ и RS пересекаютя в одной точке или параллельны.