

Разной по ТЧ

1. Натуральные числа a , b и c таковы, что $\frac{ab}{a-b} = c$. Известно также, что числа a , b и c не имеют общего для них всех натурального делителя, большего 1. Докажите, что $a - b$ есть точный квадрат.
2. Рациональные числа a , b и c таковы, что выполняется следующее равенство:
$$\frac{1}{a+bc} + \frac{1}{b+ac} = \frac{1}{a+b}$$
. Докажите, что число $\sqrt{\frac{c-3}{c+1}}$ рационально.
3. Сколько вещественных решений имеет уравнение $x^3 = \{(x+1)^3\}$? (Здесь $\{\cdot\}$ — дробная часть числа.)
4. На перемене n школьников сели вокруг учителя, чтобы поиграть в игру. Учитель идет по часовой стрелке и раздает некоторым ученикам конфеты по следующему правилу. Он выбирает одного школьника, дает ему конфету, потом пропускает следующего по часовой стрелке и дает конфету сидящему через один, затем, сидящему через два, и т.д. При каких n каждый школьник в конце концов получит хотя бы одну конфету?
5. Дано натуральное n . В ряд записаны n целых чисел. Два человека играют в игру. За один шаг первый указывает на несколько из них, записанных подряд, а второй либо увеличивает каждое из указанных чисел на 1, либо уменьшает каждое из них на 1. Найдите наибольшее k , такое, для которого первый всегда за несколько шагов сможет добиться, чтобы хотя бы k чисел стали делиться на 3.
6. Найти все приведенные целочисленные многочлены $Q(x)$, обладающих следующим свойством: существует натуральное N , такое, что для любого простого числа $p > N$ число $2 \cdot Q(p)! + 1$ делится на p .