Алгебраический разнобой

1. Пусть $\{a_k\}$ — последовательность вещественных чисел, определяемая следующим образом: $a_0 = x$, $a_1 = 1 - x$, $a_k = 1 - a_{k-1}(1 - a_{k-1})$ для всех $k \geqslant 2$. Докажите, что $a_0 a_1 \ldots a_n \left(\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) = 1$ для любого $n > 0$.

2. Коэффициенты квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ удовлетворяют условию $2a + 3b + 6c = 0$. Докажите, что это уравнение имеет корень на интервале $(0, 1)$.

3. Докажите, что для любого натурального n существует такое натуральное m, что $(1 + \sqrt{2})^n = \sqrt{m} + \sqrt{m+1}$.

4. Алиса и Боб играют в игру. Дан многочлен $x^3 + x + 2023$. Боб за свой ход изменяет свободный член многочлена на 1, а Алиса за свой ход изменяет коэффициент при x на 1. Начинает игру Боб. Алиса выиграет, если в какой-то момент получится многочлен, имеющий целый корень. Сможет ли Боб ей помешать?

5. Все коэффициенты многочлена равны 1, 0 или -1. Докажите, что все его действительные корни (если они существуют) заключены в отрезке $[-2, 2]$.

6. Пусть $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Обозначим через $n(P)$ количество целых решений уравнения $(P(x))^2 = 1$. Докажите, что $n(P) \leqslant \deg P + 2$.

7. Числа a, b, c — стороны прямоугольного треугольника с гипотенузой c. Докажите, что

$$3 < \frac{c^3 - a^3 - b^3}{c(c-a)(c-b)} \leqslant \sqrt{2} + 2.$$

8. Найти все натуральные $n \geqslant 3$, такие, что среди любых положительных вещественных чисел, таких, что $\max(a_1, \ldots, a_n) \leqslant n \cdot \min(a_1, \ldots, a_n)$, найдутся три числа, являющиеся длинами сторон остроугольного треугольника.

9. Пусть a_0, a_1, …, a_n — последовательность вещественных чисел, такая, что $a_1 = a_{n-1} = 0$ (здесь $n > 1$). Докажите, что для произвольного вещественного числа k справедливо неравенство

$$|a_0| - |a_n| \leqslant \sum_{i=0}^{n-2} |a_i - k a_{i+1} - a_{i+2}|.$$