

Графические последовательности

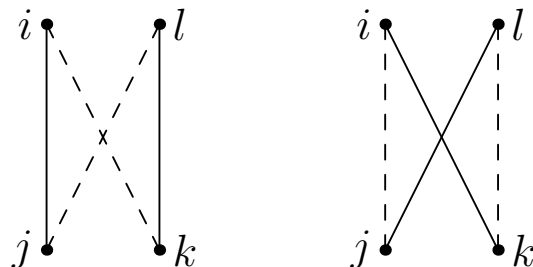
Список степеней вершин простого графа, упорядоченный по невозрастанию, будем называть его *степенной последовательностью*.

Последовательность $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$ называется *графической*, если существует граф на n вершинах с такой последовательностью степеней вершин.

- (а) Приведите примеры двух разных графов с одинаковыми степенными последовательностями.

(б) Докажите, что существуют ровно 5 графов, у которых последовательность степеней вершин равна последовательности $2 \geq 2 \geq 2 \geq 2 \geq 1 \geq 1 \geq 1 \geq 1$.
- Приведите пример последовательности с четной суммой, не являющейся графической.

Пусть в графе есть вершины i, j, k, l такие, что пары (i, j) и (k, l) соединены ребром, но пары (i, k) и (j, l) не соединены ребром. Тогда *переключением* назовем операцию, при которой мы убираем ребра в парах (i, j) и (k, l) и соединяем ребрами (i, k) и (j, l) .



Теорема. Любые два графа с одинаковыми степенными последовательностями приводятся один к другому с помощью последовательности переключений.

- Пусть вершины графа занумерованы числами $1, 2, \dots, n$ так, что $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$. Докажите, что для каждой вершины i существует такая последовательность переключений, что вершина i соединена с d_i вершинами наибольшей степени.
- Докажите теорему.

Пусть $d = \{d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n\}$ — последовательность. Обозначим через d^i последовательность, полученную вычеркиванием i -ого члена и уменьшением первых d_i членов на 1.

- (теорема Хавела-Хакими) Докажите, что

 - если для некоторого i последовательность d^i является графической, то и d — графическая последовательность;
 - если последовательность d графическая, то каждая последовательность d^i является графической.
- (теорема Эрдёша-Галлаи) Последовательность $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$ является графической тогда и только тогда, когда

 - $d_1 + d_2 + \dots + d_n$ — четное;
 - Для каждого $1 \leq k \leq n - 1$ верно неравенство $\sum_{i=1}^k d_i \leq k(k - 1) + \sum_{i=k+1}^n \min\{k, d_i\}$