# Постулат Бертрана

**1.** **(а)** Вспомните, как записывается формула вхождения простого числа $p$ в $n!$.
**(б)** Докажите, что $[x+y] \geqslant [x]+[y] \geqslant [x+y]-1$.

**2.** Пусть $n>2$ – натуральное число, а $p$ – простое.
**(а)** Докажите, что если $p>2n$, то $C_{2n}^n$ не делится на $p$, а если $n<p<2n$, то $p$ входит в $C_{2n}^n$ ровно в первой степени.
**(б)** Докажите, что если $2n/3<p\leqslant n$, то $C_{2n}^n$ не делится на $p$.
**(в)** Докажите, что если $p \geqslant \sqrt{2n}$ , то $p$ входит в $C_{2n}^n$ не более чем в первой степени.
**(г)** Докажите, что если $C_{2n}^n$ делится на $p^k$, то $p^k \leqslant 2n$.
**(д)** Докажите, что при любом натуральном $n$ выполняются неравенства $4^n > C_{2n}^n > 4^n/(2\sqrt{n})$.

**3.** **(а)** Докажите, что $C_{2n-1}^n$ делится на произведение всех простых чисел $p$, для которых $n<p\leqslant 2n-1$.
**(б)** Докажите, что произведение всех простых чисел, не превосходящих $n$, меньше $4^n$.

**4.** Для натурального $n$ обозначим через $R_n$ произведение всех простых $p$ таких, что $n<p<2n$, а для вещественного числа $x$ обозначим через $\pi(x)$ количество простых чисел, не превосходящих $x$.
**(а)** Докажите, что $R_n > \frac{4^{n/3}}{2\sqrt{n}(2n)^{\pi(\sqrt{2n})}}$ при всех натуральных $n$.
**(б)** Докажите, что $\pi(x)\leqslant x/2$ при $x\geqslant 8$.
**(в)** Докажите, что $R_n > \frac{4^{n/3}}{2\sqrt{n}(2n)^{\sqrt{n/2}}}$ при всех натуральных $n\geqslant 32$.
**(г)** Докажите, что при достаточно больших $n$ выполнено неравенство $R_n>1$.
**(д)** Выведите, что при достаточно больших $n$ между $n$ и $2n$ содержится по крайней мере одно простое число.

**5.** **(а)** Докажите, что при натуральном $k\geqslant 5$ выполнено $2^k>6k$.
**(б)** Докажите, что при вещественном $x\geqslant 5$ выполнено $2^x>6x$.
**(в)** Докажите, что при натуральном $n\geqslant 450$ выполнено $(2n)^{\sqrt{n/2}}<2^{n/3}$.
**(г)** Докажите, что при натуральном $n\geqslant 450$ выполнено $R_n>1$, и тем самым постулат Бертрана верен для $n>449$.
**(д)** Докажите, что при натуральном $n>5$ между $n$ и $2n$ содержится по крайней мере одно простое число. Здесь осталось перебрать некоторое количество небольших простых.
**(е)** При достаточно больших $n$ между $n$ и $2n$ содержится по крайней мере два простых числа.

**(ж)** **(Постулат Бертрана, 1845; теорема Чебышева, 1850)** Если $n>5$ – натуральное число, то между $n$ и $2n$ содержится по крайней мере два различных простых числа.