Задачи про площадь

1. Пусть M и N – середины противоположных сторон BC и AD выпуклого четырехугольника $ABCD$, отрезки AM и BN пересекаются в точке P, а отрезки DM и CN – в точке Q. Докажите, что сумма площадей треугольников APB и CQD равна площади четырехугольника $MPNQ$.

2. Диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Прямая, проходящая через точку O и середину стороны BC, пересекает сторону AD точке M. Докажите, что $AM : MD = S_{ABO} : S_{CDO}$

3. К двум непересекающимся окружностям ω_1 и ω_2 проведены три общие касательные – две внешние, a и b, и одна внутренняя, c. Прямые a, b и c касаются окружности ω_1 в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно, а окружности ω_2 – в точках A_2, B_2 и C_2 соответственно. Докажите, что отношение площадей треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равно отношению радиусов окружностей ω_1 и ω_2.

4. На сторонах AB, BC и CA произвольного треугольника ABC взяты точки C_1, A_1 и B_1 соответственно. Обозначим через S_1, S_2 и S_3 площади треугольников AB_1C_1, BA_1C_1 и CA_1B_1 соответственно. Докажите, что

$$\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3} \leqslant \frac{3}{2}\sqrt{S_{ABC}}$$

5. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ лучи AB и DC пересекаются в точке K. На биссектрисе угла AKD нашлась точка P такая, что прямые BP и CP делят пополам отрезки AC и BD соответственно. Докажите, что $AB = CD$.

6. На сторонах BC и DC параллелограмма $ABCD$ выбраны точки D_1 и B_1 так, что $BD_1 = DB_1$. Отрезки BB_1 и DD_1 пересекаются в точке Q. Докажите, что AQ – биссектриса угла BAD.

7. Продолжение биссектрисы AD остроугольного треугольника ABC пересекает описанную окружность в точке E. Из точки D на стороны AB и AC опущены перпендикуляры DP и DQ. Докажите, что $S_{ABC} = S_{APEQ}$.

8. В прямоугольном треугольнике ABC точка D - середина высоты, опущенной на гипотенузу AB. Прямые, симметричные AB относительно AD и BD, пересекаются в точке F. Найдите отношение площадей треугольников AFB и ABC.

9. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Пусть $\omega_A, \omega_B, \omega_C, \omega_D$ - окружности, описанные вокруг треугольников BCD, ACD, ABD, ABC соответственно. Обозначим через X_A произведение степени точки A относительно ω_A на площадь треугольника BCD. Аналогично определим X_B, X_C, X_D. Докажите, что $X_A + X_B + X_C + X_D = 0$.