

Рекурренты

Упражнения

1. Пусть x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $x^2 - 6x + 1 = 0$. Докажите, что при любом натуральном n число $x_1^n + x_2^n$ является целым и не делится на 5.
2. Последовательность задана рекуррентно: $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_1 + a_2 + \dots + a_n = n^2 a_n$. Найдите формулу общего члена.
3. Последовательность $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ задана рекуррентно: $a_0 = a$, $a_{n+1} = 2^n - 3a_n$. При каких значениях a последовательность является монотонно возрастающей?
4. Последовательность a_0, a_1, a_2, \dots такова, что для всех неотрицательных $m \geq n$ выполняется условие $a_{m+n} + a_{m-n} = \frac{a_{2m} + a_{2n}}{2}$. Найдите a_{2022} , если $a_1 = 1$.
5. На какую наибольшую степень двойки может делиться число вида $[(3 + \sqrt{10})^{2n-1}]$?

Задачи

6. Лягушка прыгает по вершинам треугольника ABC, перемещаясь каждый раз на одну из соседних вершин. Сколькими способами она может попасть из A в A ровно за n прыжков?
7. Найдите количество функций $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$, удовлетворяющих неравенству $|f(k+1) - f(k)| \geq 3$ при всех $k \in \{1, \dots, n-1\}$.
8. Сколько n -разрядных десятичных чисел, которые могут начинаться с нуля,
 - (а) не содержат в своей записи двух стоящих рядом чётных цифр;
 - (б) не содержат в своей записи цифры 5 после цифры 2.
9. Сколько существует несамопересекающихся ломаных длины n , начинающихся в начале координат $(0, 0)$, каждое звено которых совпадает с одним из векторов $r = (1, 0)$, $u = (0, 1)$, $d = (0, -1)$?
10. Шеренга солдат называется неправильной, если никакие три подряд стоящих солдата не стоят по росту (ни в порядке возрастания, ни в порядке убывания). Составьте рекуррентное соотношение для количества неправильных шеренг из n солдат разного роста.
11. На клетчатой доске размером $2 \times n$ клеток некоторые клетки закрашиваются в чёрный цвет. Раскраска называется правильной, если среди закрашенных нет двух соседних клеток (соседними называются клетки, имеющие общую сторону). Раскраска, в которой ни одна клетка не закрашена, тоже считается правильной. Пусть A_n — количество правильных раскрасок

с чётным числом закрашенных клеток, B_n — количество правильных раскрасок с нечётным числом закрашенных клеток. Найдите все возможные значения $A_n - B_n$.